Bibliothèque de Philosophie scientifique

FEDERIGO ENRIQUES

Professeur à l'Université de Bologne.

LES CONCEPTS FONDAMENTAUX DE LA SCIENCE

LEUR SIGNIFICATION RÉELLE ET LEUR ACQUISITION PSYCHOLOGIQUE

TRADUIT PAR L. ROUGIER

PARIS

ERNEST FLAMMARION, ÉDITEUR

26, RUE RACINE, 26

10943

Bibliothèque de Philosophie scientifique

FEDERIGO ENRIQUES

PROFESSEUR A L'UNIVERSITÉ DE BOLOGNE

LES CONCEPTS FONDAMENTAUX DE LA SCIENCE

LEUR SIGNIFICATION RÉELLE ET LEUR ACQUISITION PSYCHOLOGIQUE

TRADUIT PAR L. ROUGIER

PARIS

ERNEST FLAMMARION, ÉDITEUR

26, RUE RACINE, 26

1919

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction réservés pour tous les pays.

Q
175
.E5
1919

Droits de traduction et de reproduction réservés
pour tous les pays.

Copyright 1913

by ERNEST FLAMMARION.

96885155

JUL 29 '27

AVERTISSEMENT

Si on a cru devoir présenter aux lecteurs de la Bibliothèque de Philosophie scientifique le remarquable ouvrage de M. le professeur Enriques, après ceux de MM. Mach et Poincaré sur des sujets analogues, c'est qu'il forme comme le moyen-terme et le complément nécessaire de ceux-là. E. Mach est un physicien qui, particulièrement influencé par les doctrines évolutionnistes, cherche l'origine du travail scientifique dans l'activité instinctive et les nécessités biologiques de notre organisme ; mais, à envisager les choses du point de vue de la pensée commune, il ne s'élève pas jusqu'aux abstractions les plus hautes qui caractérisent la science moderne. Poincaré, au contraire, suivant en cela la tendance des mathématiciens, s'efforce de séparer les formes pures qui font l'objet de leurs études des éléments qui participent encore de la réalité : c'est à ce prix qu'il atteint la rigueur absolue. Mais, à se placer ainsi au seul point de vue de la logique formelle et de l'analyse combinatoire, les concepts fondamentaux des sciences n'apparaissent plus que comme des conventions commodes, choisies parmi plusieurs autres que l'on aurait pu adopter. F. Enriques, prenant comme point de départ celui d'E. Mach, s'évertue à légitimer ces conventions, et il en trouve la justification, soit dans les données criti-

quement évaluées de la physiologie des sens et de l'analyse des sensations, soit dans les lois générales de l'association des idées.

L'original italien : « Problemi della Scienza » se compose de deux parties. La première, qui a trait à la transformation logique des concepts et des hypothèses, a été traduite, chez Alcan, sous ce titre : « Les problèmes de la science et de la logique ». La seconde partie étudie la signification réelle et l'acquisition psychologique des concepts d'espace, de temps, de mouvement, etc. Elle constitue le contenu du présent ouvrage, qu'une révision minutieuse et de nombreux compléments ont rendu tout à fait autonome, et tenu au courant des derniers progrès de la pensée scientifique. Ce n'est pas seulement une théorie de la connaissance, dans le sens indiqué, qu'on y trouve, mais une revue complète des principes des sciences physiques, décrite avec une hauteur de vues et une originalité singulières. Je n'en veux citer, à l'appui, que la manière dont l'auteur envisage l'histoire de la physique comme le conflit, l'alternance et la superposition de deux types d'explication mécanique, et sa conception, si forte, d'une dynamique non-newtonienne.

L. R.

PRÉFACE

Tandis que les problèmes soulevés par la science remplissent la philosophie contemporaine ; par delà les motifs religieux et sociaux qui suscitent le mouvement anti-intellectualiste, on voit se développer une théorie de la connaissance scientifique qui tend à se constituer sur une base solide, comme une partie de la science elle-même.

A cette théorie se rattache notamment l'explication des concepts fondamentaux de la science, de leur signification réelle et de leur développement psychologique. C'est peut-être la question la plus débattue de la gnoséologie scientifique, que je me propose d'éclaircir ici par une analyse méthodique.

Cette tâche n'est pas facile. Il m'a fallu parcourir des domaines très étendus, depuis les principes de la géométrie jusqu'aux développements les plus récents de la physique et de la biologie.

Or, il importe que l'idée directrice de ce travail ne soit pas submergée par la diversité des questions qu'il soulève. C'est, au reste, une idée très simple : dans chaque domaine, je me suis attaché essentiellement à reconnaître la fonction propre de l'esprit qui crée la science ; c'est dans l'unité de cette fonction qu'on découvrira l'unité du savoir et le lien des problèmes que pose notre critique.

Ces lignes suffisent à marquer la différence du point

de vue où je me place d'avec certaine conception, aujourd'hui démodée, d'après laquelle le savant se bornerait à enregistrer passivement les données de l'expérience. Mais, je ne tiens pas moins à mettre en lumière les différences qui me séparent du pragmatisme, c'est-à-dire de la doctrine qui, s'appuyant sur le rôle actif de l'esprit du savant, aboutit à considérer la construction des concepts scientifiques comme le produit d'un décret arbitraire de la volonté de ceux qui nous ont précédés dans les voies de l'histoire. A l'encontre de cette doctrine, l'analyse que j'ai entreprise me persuade qu'il y a partout un développement psychologique dont les raisons intimes se rattachent à la structure même de l'esprit humain.

Certes, il n'est pas aisé de définir cette structure ; parfois ce sont des données de la physiologie des sens qui suffisent à rendre compte de certaines tendances opposées du mouvement scientifique ; ailleurs, les lois générales de l'association des idées donnent lieu à un développement univoque de certains concepts plus fondamentaux. Toujours est-il que l'arbitraire dans la construction scientifique semble s'éliminer de plus en plus dans la genèse des concepts scientifiques, considérés, non pas dans leur possibilité logique, mais dans leur développement réel. La poussée de l'expérience, combinée à la nature de l'esprit humain, semble devoir expliquer, dans ses traits généraux, le devenir de la science.

En terminant, je tiens à exprimer ici mes remerciements à M. Rougier qui, au cours de la traduction de cet ouvrage, a bien voulu me communiquer ses suggestions précieuses et attirer mon attention sur maints points qui méritaient quelques compléments.

FEDERIGO ENRIQUES.

Les Concepts fondamentaux de la Science

LIVRE I

LA GÉOMÉTRIE

CHAPITRE I

SIGNIFICATION RÉELLE DE LA GÉOMÉTRIE.

§ 1. **Introduction**. — Il semble que l'on doit accorder à la géométrie une place d'honneur dans le champ des études philosophiques. En Grèce, elle fut un puissant moyen d'éducation intellectuelle, et contribua, avec la rhétorique, à former la science du raisonnement. Dans les temps modernes, le mouvement de pensées qui accompagne notre culture européenne commence avec une école de philosophes qui étaient en même temps des géomètres. Descartes ne fut-il pas l'initiateur et Leibniz le rénovateur de cette philosophie rationaliste qui, dans sa lutte contre l'empirisme, éduqua les esprits, et devint ainsi un instrument de progrès d'où sont sorties les vues modernes? De même les deux penseurs qui ont exercé la plus grande influence sur la spéculation du XIXe siècle, Emmanuel Kant et Auguste Comte, sont redevables en majeure partie de

leur force à une éducation de géomètres. Mais, avant tout, le progrès de la géométrie dans le siècle dernier a arrêté le développement du rationalisme — qui, sitôt hors de son pays d'origine, prit un essor de plus en plus audacieux, — au moyen de ce merveilleux résultat : la construction des géométries non-euclidiennes. Par elles, il devint évident que nos concepts géométriques, pour autant qu'ils se rapportent à une réalité saisissable, ne peuvent aucunement prétendre à cette exactitude rigoureuse qui fut longtemps considérée comme un des plus forts arguments en faveur de leur origine *a priori*.

C'est de là que sont issues les conceptions et les tentatives les plus hardies de la philosophie géométrique, qui s'efforcent, par diverses voies, d'éclaircir le problème physique de la structure de l'espace, depuis les recherches de Gauss, Lobtschewsky, Bolyai, Riemann, Helmholtz, jusqu'aux travaux les plus récents d'Hilbert et de son école.

§ 2. **Réalisme et nominalisme géométriques.** — A l'encontre de ce mouvement, ou tout au moins de l'interprétation que lui accorde la majorité des mathématiciens, les philosophes de l'école de Kant soulèvent leur objection préjudicielle : on ne saurait parler de la géométrie comme d'une science physique parce que l'espace n'est pas un véritable objet d'expérience, mais seulement une forme *a priori* de notre sensibilité, thèse nominaliste que renouvellent sous une autre forme des critiques plus récentes.

La controverse entre le réalisme et le nominalisme géométriques est une des plus délicates et des plus grosses de conséquences pour la philosophie générale. Il ne s'agit pas tant de décider entre deux thèses contradictoires, nettement posées, que, comme il arrive

si souvent, de déterminer en quel sens ces deux thèses peuvent être également acceptées, sans contradiction aucune. Un examen dirigé dans ce sens nous montrera que le résultat négatif auquel conduisent certaines façons de poser le problème de l'espace n'exclut pas la possibilité d'une façon légitime de comprendre le réalisme géométrique, dont le résultat positif est de mettre en lumière les faits qui sont la base de la géométrie.

Ainsi, à la thèse de Kant qui nie l'existence d'un objet réel correspondant au mot *espace*, s'oppose, avec Herbart, la thèse de la réalité des *rapports spatiaux*; et au nominalisme, récemment soutenu par Poincaré, qui montre que ces relations n'ont aucune signification réelle *absolument indépendante des corps*, s'oppose une évaluation plus précise de la géométrie conçue comme *partie de la physique*.

§ 3. **Critique des définitions transcendantes de l'espace.** — Le nominalisme géométrique procède d'une façon transcendante de définir l'espace et les relations spatiales entre les corps. Posons-nous la question : « Qu'est-ce que l'*espace*? » et essayons d'y répondre par une analyse appropriée.

Considérons un corps quelconque, un morceau de cuivre ou de fer par exemple, qui se trouve dans l'air, l'eau, ou n'importe quel milieu naturel. La connaissance de ce corps nous permet de distinguer certains groupes de sensations qui se rapportent à la matière comprise soit *à l'extérieur*, soit *à l'intérieur* de ce corps. Un nombre infini de cas différents par la substance du corps choisi ou du milieu ambiant présentent cependant quelque chose de commun, si bien qu'*abstraction faite des particularités sensibles du cuivre ou du fer, de l'air ou de l'eau*, nous arrivons à la notion

d'un certain mode de séparer la matière de la matière, qui exprime tout le contenu positif du concept de *solide* et de *surface*. Si l'on prend maintenant un sphère capable de croître indéfiniment, on a coutume de dire qu'elle remplit tout l'*espace*, quand elle est devenue infiniment grande. Rien d'étonnant, dès lors, à ce qu'un tel processus transcendant[1] conduise à attribuer au mot « espace » un sens totalement illusoire En effet, la notion de sphère impliquant un certain mode de distinguer les sensations qui se rapportent à l'intérieur de celles qui se rapportent à l'extérieur, une sphère infiniment grande, à laquelle ne corres pond aucune distinction de ce genre, n'a plus de signification réelle. L'espace ainsi défini est un mot vide de sens.

Il n'y a pas lieu de prolonger cette critique négative. Immanquablement nous vient à l'esprit le raisonnement de Don Ferrante, dans *les Fiancés* de Manzoni, qui démontre qu'il ne saurait y avoir de contagion de la peste, car la peste n'est ni substance, ni accident. Mais, au cours de la même analyse, on voit clairement qu'en dehors de ce sens transcendant du mot espace, une signification physique reste encore possible pour les *rapports spatiaux ou de position des corps*, dont l'ensemble peut être désigné par le mot « espace » pris dans un sens positif. Qu'effectivement ces rapports comportent une véritable connaissance, c'est ce qui résulte de ce que les relations de rectilignité, d'équidistance, etc., correspondent à une relation invariable entre certains actes volontaires et les sensations qui en

1. Une définition et un raisonnement sont transcendants lorsqu'ils impliquent comme achevé on épuisé ce qui, par définition, ne saurait jamais l'être ou conférerait à notre esprit le pouvoir d'accomplir en un instant une infinité d'associations ou une suite infinie de passages. (*N. d. T.*)

résultent. Rien de plus constant ni de plus précis que les prévisions géométriques !

L'acception du mot « espace » pour désigner un corps infiniment grand n'est pas la seule qui repose sur un procédé de définition transcendant, et conduise, de ce fait, à une conclusion nominaliste. On peut également concevoir les relations spatiales transcendantalement, soit en attribuant un sens *absolu* à leur *généralité*, soit en leur accordant une *exactitude infinie*, deux modes d'interprétation apparemment d'ailleurs liés l'un à l'autre.

La généralité géométrique consiste en ceci : les distinctions spatiales ne dépendent pas de la nature de la matière que l'on distingue, par exemple comme étant en dehors ou au dedans d'une sphère donnée. Cette indépendance implique seulement l'existence actuelle ou la possibilité de distinctions analogues se rapportant à d'autres substances, et non une relation physique *absolument générale, caractéristique de l'espace en soi, même en l'absence de toute matière.*

La prétention d'attribuer à la géométrie une signification indépendante des corps physiques se rattache à celle de chercher dans ses rapports une exactitude infinie ou absolue, car, sitôt qu'on a écarté l'interprétation précédente de la généralité géométrique, il n'est plus possible d'attribuer l'exactitude que comporte la théorie mathématique au monde physique, dès que l'on s'est rendu compte qu'aucun objet réel ne répond aux concepts mathématiques de « point », « ligne », « surface », « droite », « plan », « distance », etc.

A la constatation courante de l'inexistence de semblables objets, on peut ajouter une considération théorique. Dans le monde physique, il ne nous est pas possible de nous rapprocher, au delà d'une certaine

limite, de l'imitation des figures géométriques mentionnées. Avant tout, c'est l'imperfection de nos sens qui entraîne cette limite ; certains instruments peuvent la reculer, mais leur propre imperfection en comporte une nouvelle, qui n'est plus seulement pratique, mais théorique. Ainsi, la longueur des ondes lumineuses constitue une limite infranchissable au pouvoir de visibilité de l'œil humain, même armé du microscope.

§ 4. **Le nouveau nominalisme de Poincaré.** — L'impossibilité d'accorder un sens aux relations spatiales indépendamment des corps, et l'inexistence d'objets réels répondant aux concepts mathématiques de « point », « droite », etc., ont été considérées par Poincaré comme la réfutation décisive du réalisme géométrique.

Si l'on ne trouve pas à proprement parler dans son ouvrage *la Science et l'Hypothèse* un examen critique préalable de la signification réelle du mot « espace », le sens transcendant qu'il accorde aux relations géométriques dérive clairement des quelques passages suivants de ses écrits :

« Les expériences ne nous font connaître que les rapports des corps entre eux ; aucune d'elles ne porte, ni ne peut porter sur les rapports des corps avec l'espace, ou sur les rapports mutuels des diverses parties de l'espace... » (*op. cit.* p. 100).

« Direz-vous que si les expériences portent sur les corps, elles portent du moins sur les propriétés géométriques des corps ?

« Et d'abord, qu'entendez-vous par propriétés géométriques des corps ? Je suppose qu'il s'agit des rapports des corps avec l'espace... » (*op. cit.* p. 101)

« ...il n'existe pas de propriété qui puisse... être un

critère absolu permettant de reconnaître la ligne droite et de la distinguer de toute autre ligne.

« Dira-t-on, par exemple : cette propriété sera la suivante : la ligne droite est une ligne telle qu'une figure dont fait partie cette ligne peut se mouvoir sans que les distances mutuelles de ces points varient et de telle sorte que tous les points de cette ligne restent fixes ?

« Voilà en effet une propriété qui... appartient à la droite et n'appartient qu'à elle. Mais comment reconnaîtra-t-on, par expérience, si elle appartient à tel ou tel objet objet concret ? Il faudra mesurer des distances, et comment saura-t-on que telle grandeur concrète que j'ai mesurée avec mon instrument matériel représente bien la distance abstraite ? » (p. 94-95.)

Ces affirmations comportent la constatation déjà énoncée, et du reste évidente, de ce fait que les *pures* relations géométriques sont une abstraction à laquelle ne correspond rien de réel, et que les concepts élémentaires de la géométrie (point, droite, etc.) sont également le résultat d'une abstraction qui ne trouve dans la réalité aucuns duplicata sensibles exacts de ses objets. Ils ne servent que comme *symboles* pour énoncer certains rapports de position des corps, à l'aide des propositions de la géométrie.

Si la critique de Poincaré se fût bornée là, elle serait irréfutable. Mais le célèbre auteur est allé plus loin. Il a conclu que les propriétés géométriques ne répondent à aucuns faits réels, mais sont un simple *système de conventions* au moyen desquelles on exprime les faits physiques, tout comme on rapporte les grandeurs à un système de mesure. Le système peut être commode, mais rien n'empêche de le changer. Demander si un phénomène est possible avec un certain système de géométrie, et impossible avec le sys-

tème contraire, équivaut à se demander s'il y a des longueurs exprimables en mètres et non en pieds anglais.

Une telle conclusion ne semble pas acceptable. Le fait d'exprimer théoriquement les propositions géométriques au moyen de rapports entre concepts que, dans leur acceptation mathématique, on traite comme de purs symboles, ne suffit pas pour en faire l'objet d'un choix arbitraire vis-à-vis du monde physique, où ces symboles trouvent une réalisation approximative dans certains objets, qui sont ainsi représentés par eux.

Pour dissiper les doutes, Poincaré a essayé d'étayer sa thèse sur certaines constructions d'une conception toute géniale. Il s'agit pour lui d'imaginer des conditions physiques telles que *le même espace* où nous vivons *paraîtrait posséder des propriétés différentes* de celles impliquées par notre géométrie. Il suffit pour cela d'admettre que les corps en se déplaçant se transforment suivant certaines lois, par exemple, sous l'effet d'un changement de température *qui dépendrait de leur position*, et que la lumière, au lieu de se propager en ligne droite, est déviée par un milieu réfringent, *réparti d'une manière appropriée dans un champ spatial, etc.*

Un examen attentif de cet exemple montre que les hypothèses introduites, quand on les interprète positivement par rapport à la relativité de nos connaissances, comportent un *véritable* changement de l'espace, je veux dire des rapports connotés par ce mot.

Dans notre monde, les corps sont mesurables les uns par rapport aux autres, grâce à la possibilité de les déplacer indépendamment des variations de leur état physique. L'échauffement, le refroidissement, la pression modifient, il est vrai, les termes de comparaison impliqués dans toute mesure ; mais ces changements sont accidentels vis-à-vis de leur position réciproque et la géométrie n'a pas à s'en préoccuper. Dans le monde imaginaire de Poincaré, au contraire, la température deviendrait un véritable *caractère géométrique des corps*, parce que chacun d'eux, et notre organisme en particulier, posséderait une température dépendante de sa position; et, comme il ne serait plus possible de superposer et, par conséquent, de mesurer des corps de chaleurs différentes, on ne pourrait plus dire que « les corps se dilatent avec la chaleur » : si bien que, dans ce monde imaginaire, la géométrie serait *en réalité*, et non plus seulement en *apparence*, différente de la nôtre.

L'affirmation contraire prend la réalité comme opposée à l'apparence dans un sens transcendant. Elle contredit aussi aux données de l'hypothèse, en introduisant subrepticement dans ce monde un juge fait à notre image et soustrait aux lois qui y règnent. La même critique s'adresse à l'hypothèse de la propagation non rectiligne de la lumière. Rien de plus facile, en se plaçant au point de vue abstrait, que d'accepter cette hypothèse. N'est-elle pas réalisée dans n'importe quel milieu hétérogène, conformément aux lois de la réfraction ? Mais l'hétérogénéité du milieu, que peuvent révéler certaines expériences physiques, est encore quelque chose d'accidentel par rapport aux phénomènes; les trajectoires des rayons lumineux peuvent, dans ce cas, être *changées* quand on modifie l'orientation du milieu dans le champ de notre expérience. Que signifierait, au contraire, un milieu hétérogène avec une distribution spéciale fixe, comme un éther diversement constitué, dont les parties ne se déplaceraient pas les unes par rapport aux autres avec le mouvement des corps? Est-ce qu'on ne créerait, pas avec

cette hypothèse, un *monde géométrique* différent du nôtre que nous reconnaissons comme *homogène?*

Pour approfondir ces questions, il convient de se rendre compte de la signification physique de la ligne droite.

Le concept de ligne droite dérive de l'étude de différents ordres de phénomènes :

1° De celle des corps *solides*, où la droite entre comme *axe* dont les points restent immobiles pendant la durée d'une rotation (à l'image d'un fil tendu, etc.)

2° De la dynamique *du point matériel*, où la droite se présente comme *trajectoire* d'un point dont le mouvement n'est influencé par aucun des corps qui l'entourent;

3° De l'optique, et, en général, de l'étude des radiations où la droite se présente comme un *rayon* ou ligne de symétrie des phénomènes, dans n'importe quel milieu, que la comparaison d'expériences déterminées révèle comme *homogène*.

La première et la troisième propriétés servent principalement à définir la droite par rapport au sens de la vue et du toucher, au lieu que la seconde pourrait sans doute servir à la définir par rapport au sens musculaire. Toutes ces définitions se prêtent également bien à fonder un système de géométrie; en particulier, permettent-elles d'obtenir une *géométrie des corps solides* (ou géométrie *métrique*) et une géométrie *optique* (ou géométrie *projective*).

La concordance des différentes façons d'envisager la droite comme axe et comme rayon est un fait fondamental qui nous permet de subsumer deux catégories différentes de phénomènes sous *une même représentation géométrique*. A celle-ci peuvent se ramener encore les autres phénomènes connus, notamment les phénomènes dynamiques. Les fondements de cette représentation se trouvent dans ce fait que certaines conditions d'homogénéité du milieu conduisent à une *symétrie des phénomènes* par rapport à certaines lignes; un tel rapport de dépendance constitue la vraie signification physique de *l'homogénéité de l'espace*.

Rien ne nous empêche maintenant de supposer que les multiples concordances, dont l'ensemble constitue la symétrie en question, ne subsisteraient plus réellement, si l'on soumettait les mêmes faits à des observations plus précises. Mais, dans ce cas, il s'agirait de tout autre chose que de modifier simplement quelques propositions de la théorie de la lumière; car l'ensemble des faits désignés par *l'hypothèse de la droite* se trouveraient démentis à ce nouveau degré d'approximation.

§ 5. La géométrie comme partie de la physique. — Les philosophes qu'une conception transcendante de la géométrie conduit au nominalisme, nous apparaissent comme victimes de cette illusion fondamentale, qui consiste à considérer la connaissance scientifique comme *achevée* sous son aspect *actuel*, sans tenir compte de sa *genèse historique*.

C'est cette conception de la science que Kant a puisée dans le système de Newton; la hiérarchie scientifique, selon laquelle les rapports les plus complexes sont subordonnés aux plus simples, est prise par lui dans un sens gnoséologique absolu. Ainsi, en particulier, cette circonstance que la géométrie *précède* dans une exposition dogmatique la mécanique et la physique, et que les connaissances géométriques se trouvent à la base des méthodes fondamentales de la recherche physique, se convertit chez lui en un rapport de dépendance nécessaire qui trouve son expression dans l' « a priori » kantien. Et, remontant de la critique de

la connaissance scientifique à celle de la connaissance vulgaire, il considère l'intuition des rapports spatiaux qui régissent les associations de nos sensations actuelles (de la vue et du toucher) comme existante *a priori* par rapport à ces sensations ; séparé des données sensibles (que l'on considère arbitrairement comme des éléments simples isolés dans l'espace et dans le temps), l'ordre spatial devient un *cadre* que l'esprit leur impose, et dans lequel elles trouvent place.

Or, toute cette construction gnoséologique a été dépassée par une vue plus adéquate du *développement* de la connaissance, qui constitue l'acquisition la plus sûre de la philosophie évolutionniste. La nécessité d'interpréter l'expérience au moyen de connaissances antérieures, et la dépendance de toute phrase du progrès scientifique à l'égard d'une phase précédente, sont interprétées dans un nouveau sens : non plus en établissant une hiérarchie absolue des sciences, mais en reconnaissant le développement graduel de chacune d'elles, si bien que certaines notions plus simples ou susceptibles de définitions plus précises se détachent de la masse des données empiriques brutes, jusqu'à constituer un corps de doctrine relativement autonome. Ainsi la géométrie, au lieu d'être considérée comme précédant nécessairement la physique, en devient une partie élevée à un haut degré de perfection, grâce à la simplicité, à la généralité et à l'indépendance relative des rapports qui la constituent.

Quand les propositions géométriques sont prises dans un sens physique, les prévisions concrètes qu'elles autorisent sont liées à des facteurs physiques qui sont généralement considérés comme dépourvus de caractère géométrique. Les théorèmes de la géométrie théorique apparaissent alors seulement comme l'expression symbolique de rapports physiques, incomplètement énoncés, et qui ne trouvent leur pleine détermination que dans les applications concrètes. A l'égard de celles-ci, la forme précise des théorèmes représente seulement un degré d'approximation qui peut être poussé plus avant, quand on convertit les *égalités* qu'ils expriment en *inégalités*, comme dans l'exemple suivant.

Considérons le théorème : « Les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux. »

Dans la réalité, il existe des objets (*triangles physiques*) que l'on peut représenter avec une certaine approximation par le concept de triangle. Construisons un de ces objets, avec trois fils de fer minces ou à l'aide d'un dessin sur du papier. Mesurons avec le mètre deux côtés, et avec le goniomètre les deux angles opposés. La mesure réelle d'un côté est représentée par deux nombres dont la différence (soit 0,0001) est relative à la précision des instruments employés ; elle s'exprime en disant que la longueur du côté est égale à 3,4576, à moins d'un dixième de millimètre près, c'est-à-dire qu'elle est comprise entre 3,4576 et 3,4577. Si les deux côtés du triangle en question sont également mesurés dans le sens indiqué du nombre 3,4576, on devra considérer le triangle comme « isocèle » et notre prémisse sera : « que les côtés sont égaux à moins de 0,0001 près ».

La mesure des angles opposés nous est fournie par le goniomètre. Le théorème énoncé plus haut nous avertit que la différence entre les deux angles sera très petite, et que les mesures de ces angles seront égales, à un degré d'approximation qui dépend de celui que comporte la vérification de la prémisse. Quand on veut obtenir la signification exacte du théorème dans la réalité, il faut donc le modifier de la façon suivante :

« Si deux côtés d'un triangle diffèrent de moins d'une certaine longueur ε, les deux angles opposés différeront de moins d'une quantité τ, dépendante de ε suivant une certaine loi. » Il convient de compléter le théorème, en trouvant une fonction $f(\varepsilon)$, telle qu'elle soit, pour ε, inférieure à une certaine limite, $\tau < f(\varepsilon)$.

Grâce à un calcul facile, on trouve (τ étant exprimé en degrés)

$$\tau < 61.\frac{\varepsilon}{a},$$

où a représente, avec une erreur inférieure à ε, la longueur des côtés sensiblement égaux de notre triangle ; dans notre cas

$$(\varepsilon < 0{,}0001, \quad a > 3)$$

on aura

$$\tau < 1''$$

Quand les théorèmes de la géométrie sont convertis d'égalités en inégalités dans le sens illustré ci-dessus, on reconnaît qu'ils représentent une partie des rapports de position des corps ; ce qu'il faut leur ajouter, dans les différentes applications concrètes, se rapporte à la nature des corps dont il est question (à leur chaleur et aux forces qui s'y exercent, etc.), et est à considérer de ce fait comme étranger à la géométrie théorique.

Bien que la distinction entre la théorie et la pratique soit introduite, par convention, pour simplifier la compréhension de la réalité, cette simplification n'est rendue possible que grâce à une *régularité statistique*, qui se superpose à l'*irrégularité des phénomènes*, et que l'on interprète en admettant l'existence de faits

géométriques plus généraux et plus précis, se rapportant à des conditions hypothétiquement simples.

§ 6. **Exactitude de la Géométrie.** — Tâchons d'expliquer et d'approfondir ces considérations par une plus juste appréciation de l'*exactitude* géométrique.

La vérification *directe* d'une propriété géométrique ne peut, dans chaque cas particulier, dépasser une certaine limite d'approximation qu'il est possible de fixer, *a priori*, en fonction de celle que nous avons déjà rencontrée dans la réalisation des objets géométriques. Mais, si on considère cette propriété comme une hypothèse qui dépend de simples conditions théoriques, il se présente tant de voies indirectes de la vérifier, que l'on ne peut plus poser de limites *a priori* à son exactitude.

En ce sens, la géométrie apparaît comme un système de *suppositions générales*, dont la signification consiste dans l'*ensemble des faits* qui s'en laissent déduire et qui se rattachent ainsi à une série d'expériences que l'on peut poursuivre indéfiniment. C'est dans ce sens que nous avons déjà interprété l'existence de la ligne droite, comme supposition d'une symétrie générale des phénomènes, à laquelle se rattachent des vérifications des propriétés de la droite, beaucoup plus précises que celles fournies immédiatement par les propriétés des axes de rotation des corps solides.

Il importe de bien fixer ce dernier point : les vérifications indirectes d'une relation géométrique ont un sens malgré l'impossibilité de réaliser (dans l'ordre d'approximation voulu) les conditions simples dont dépend cette relation. C'est ce qui résulte avec une netteté particulière des considérations statistiques

auxquelles nous faisions allusion tout à l'heure. Nier l'hypothèse géométrique, c'est admettre une source d'erreurs *systématiques* qui se superposent aux différentes conditions réelles et peuvent apparaître, dans un grand nombre de vérifications, comme distinctes des irrégularités *accidentelles*. Ainsi, pour nous rapporter à l'exemple déjà considéré, l'imperfection des modèles et l'imprécision de nos mesures peuvent bien entraîner une erreur dans la vérification du théorème : « les angles à la base d'un triangle isocèle sont égaux à deux droits » ; mais, dans un grand nombre de vérifications graphiques basées sur ce théorème, ces erreurs accidentelles tendent à se compenser, et c'est en ce sens qu'on peut dire que l'inexactitude des applications n'infirme en rien l'exactitude du théorème.

Qu'on essaie, maintenant, d'exécuter à diverses reprises une série de dessins d'une construction approchée comme celle de Specht pour la rectification du cercle. Dans ce cas, il se produit une source d'erreurs systématiques, qui deviennent toujours plus *sensibles* dans un plus grand nombre d'expériences.

L'*exactitude de la géométrie* nous apparaît, en fin de compte, comme une hypothèse vérifiée à chaque instant du progrès scientifique *jusqu'à un certain point* et qui anticipe le résultat d'autres expériences possibles. Il est clair qu'on ne pourra jamais définitivement prouver cette hypothèse, puisque la série des expériences possibles est illimitée; rien n'empêche même, à la rigueur, qu'elle puisse se trouver *contredite*.

Toutefois, pour bien comprendre le valeur du doute soulevé ici, il importe de voir comment on réussit à imaginer une géométrie contraire à la nôtre, aussi

précise et cohérente. Un exemple nous en est fourni par la construction de la géométrie non-euclidienne. Il nous montre que, sans contredire les faits sur lesquels repose la définition des entités géométriques fondamentales, on peut faire des hypothèses inconciliables avec la certitude de la géométrie ordinaire, qui s'expriment, cependant, dans une *véritable géométrie différente de la nôtre*.

CHAPITRE II

LES GÉOMÉTRIES NON-EUCLIDIENNES ET LEURS CONSÉQUENCES PHILOSOPHIQUES.

§ 7. **L'espace en tant que concept : la géométrie abstraite.** — Pour éviter les malentendus, commençons par la remarque suivante : l'espace considéré par le géomètre n'est pas seulement une intuition suivant laquelle s'ordonnent les images sensibles, mais un *concept*, comme n'ont cessé de le répéter les géomètres depuis Leibniz.

C'est un des torts de la critique de Kant d'avoir méconnu cette signification du mot « espace » : la géométrie n'en peut faire abstraction si elle veut revêtir la forme logique d'une science déductive ordinaire.

Vainement on objectera qu'un concept suppose toujours une multiplicité d'objets individuels, auxquels il s'applique, et dont il est tiré par généralisation et abstraction, tandis que l'espace ne correspond qu'à un seul objet. Ceux qui attribuent encore une valeur à ce vieil argument semblent ignorer la signification logique abstraite que l'espace a acquise auprès des géomètres.

Le concept d'espace, dans son acceptation mathématique, désigne l'ensemble des relations (géométriques) existantes entre des *points*, abstraction faite des sensations particulières qui se rattachent à l'image du point. L'espace est ainsi conçu comme une *variété d'éléments quelconques*, qui reçoivent le *nom* de « points », parce qu'ils sont disposés suivant certaines relations d'ordre, propres à représenter, avec une grande approximation, les rapports de position qui existent entre de très petits corps (*points physiques*).

Pluecker a tiré profit de cette indétermination laissée à l'objet désigné par le mot « point », pour étudier sous le nom d'espace des formes géométriques très diverses. On attribue, par exemple, le nom de « points » aux cercles d'un plan ; on fixe d'une façon convenable ce que l'on convient d'entendre par la distance de deux cercles et quels systèmes de cercles on désignera du nom de « droites » et de « plans ». Ces définitions doivent être posées de façon que les propriétés géométriques élémentaires de l'espace ordinaire (postulats) se traduisent en propriétés valables pour la géométrie des cercles. Quand cette condition est satisfaite, on établit une correspondance entre l'espace ponctuel ordinaire et l'espace des cercles ; à chaque figure formée de points correspond une *figure formée de cercles* et toute proposition concernant la première se traduit, suivant la *dualité* admise, par une proposition concernant la seconde.

Lorsque l'on transporte le principe de Pluecker à la géométrie appliquée, il semble naturel de considérer, à côté de notre espace physique, des variétés d'éléments pour lesquels les propriétés qui traduisent les postulats géométriques ne se trouvent satisfaites qu'en partie. On donne ainsi naissance à une série d'*espaces abstraits*, auxquels s'appliquent *différentes*

géométries, contruites toutes également sur une base commune. Par exemple, on construit une série d'espaces non-euclidiens, où le postulat des parallèles ne se trouve plus vérifié. Cette série d'espaces, dépendant de la valeur d'un certain paramètre K, appelé improprement *coefficient de courbure spatiale*, tombe sous le concept d'un espace plus général que l'espace ordinaire.

Par une généralisation ultérieure, on peut englober sous ce concept la série des *espaces à plusieurs dimensions*, ou d'autres variétés s'écartant davantage encore de l'espace physique. On ne peut imposer aucune limite à ce processus de généralisation qui dépend seulement d'une *convention* que le mathématicien juge utile d'établir dans l'intérêt de ses études.

La théorie des espaces abstraits est, actuellement, une partie essentielle de l'édifice géométrique élevé au cours du siècle précédent : laissant de côté ce qu'elle nous a enseigné dans le champ de l'analyse, arrêtons-nous de préférence sur l'intérêt philosophique qu'elle présente.

Cet intérêt est double, soit qu'il se rapporte au problème de l'espace physique, soit qu'il concerne l'origine et le développement de nos connaissances géométriques.

§ 8. **Remarques historiques sur l'origine de la géométrie non-euclidienne.** — Depuis l'époque d'Euclide jusqu'au début du siècle précédent, il était universellement admis que nous possédons dans le concept d'espace, tel qu'il a été défini par les axiomes et les postulats de géométrie grecque, une représentation rigoureusement exacte des rapports physiques de position des corps. Douter de cette exactitude

devait apparaître comme une folie aux yeux d'un chacun, tant que cette représentation fut considérée comme l'*unique possible;* si bien que l'on peut supposer sans témérité que le plus puissant génie ne serait jamais parvenu à l'idée d'un doute si peu concevable, n'eût été un défaut dans la construction logique de la géométrie d'Euclide qui y conduisit.

On croyait alors que les propositions fondamentales de la géométrie ont le caractère d'axiomes nécessaires comme les axiomes de la logique et n'en diffèrent pas en nature : aussi se résignait-on mal à leur joindre la proposition, en quelque sorte moins évidente, qui constitue le cinquième postulat d'Euclide sur les parallèles.

Dans l'exposé d'Euclide, la géométrie repose sur des définitions, des notions communes et des postulats. Ces derniers demandent la possibilité d'effectuer certaines constructions élémentaires, ayant pour but de confirmer l'*existence* des concepts fondamentaux de la géométrie, conformément à la fonction que les Grecs attribuaient aux constructions géométriques (Zeuthen).

Mais, en réalité, d'autres hypothèses, nettement distinctes des axiomes logiques, sont contenues implicitement, tant dans les définitions que dans les notions communes d'Euclide, et la critique moderne, qui ne définit pas les concepts premiers de la géométrie, les énonce également sous le nom de *postulats*.

Il existe différentes manières d'énoncer et de classer les prémisses nécessaires à la géométrie d'Euclide. Nous adopterons la classification suivante :

1° Les postulats relatifs à la détermination de la droite et du plan et à leur mutuelle appartenance;

2° Les propriétés fondamentales de la *ligne droite*,

envisagée comme système de points (*ordres naturels*, *segments*, etc.);

3° Les propriétés du *plan* par rapport à ses droites (division, angle);

4° La division de l'espace par rapport à un plan;

5° La possibilité du mouvement, c'est-à-dire les principes de la *congruence* des figures (d'où dérivent les théorèmes sur l'égalité des angles, etc.);

6° Les postulats des parallèles (V^e^ postulat d'Euclide) : si deux droites en rencontrent une troisième dans un plan, et si elles font, d'un même côté avec elle, des angles intérieurs dont la somme soit moindre que deux droits, ces deux droites, prolongées indéfiniment, se rencontreront du côté où la somme des angles est inférieure à deux droits.

A ce postulat (qu'on peut remplacer par le suivant : par un point pris hors d'une droite, on ne peut mener qu'une parallèle à cette droite) se rapportent d'innombrables tentatives de démonstration, commencées par les premiers commentateurs d'Euclide et poursuivies jusqu'à Legendre. Mais les démonstrations proposées reposent explicitement ou implicitement sur quelque hypothèse équivalente au postulat en question et qui n'est pas contenue dans les postulats 1-5.

Sans nous aventurer dans l'historique de ces tentatives, qu'il nous suffise de rappeler quelques noms et quelques dates qui se rattachent, de plus près, à la construction de la géométrie non-euclidienne,

John Wallis (1663) a découvert que le postulat des parallèles est le fondement nécessaire de la théorie de la similitude, de sorte que de l'hypothèse de triangles semblables on peut tirer la démonstration de ce postulat.

Girolamo Saccheri, dans son *Euclides ab omni naevo vindicatus*... (1733), part de la construction d'un

quadrilatère ayant trois angles droits et distingue trois hypothèses possibles pour le quatrième angle, d'accord avec les propositions 1-5 : il peut être droit, obtus ou aigu. Il démontre que chacun de ces cas se trouvera vérifié pour *tous* les quadrilatères, dès qu'il le sera pour un seul. Il établit alors, pour chacun des trois cas, les propriétés que possèdent deux droites d'un plan perpendiculaire à une troisième : dans le premier cas, elles seront partout équidistantes (d'où suit le postulat d'Euclide sur les parallèles); dans le second cas, elles commenceront à se rapprocher à partir de la perpendiculaire commune; dans le troisième cas, elles divergeront.

L'hypothèse de l'angle obtus est éliminée par Saccheri comme contredisant l'*infinité de la droite*. Contre l'hypothèse de l'angle aigu, l'auteur recourt à des arguments vicieux; mais il était convaincu *a priori* de l'impossibilité de cette hypothèse. Cette erreur, sur laquelle s'achève son œuvre, n'enlève rien à la valeur des résultats précédents auxquels on peut ajouter le suivant :

Si l'hypothèse de l'angle obtus est juste, la somme des angles d'un triangle quelconque est toujours inférieure à deux droits; dans l'hypothèse de l'angle aigu, elle est, au contraire, supérieure à deux droits; si, pour un triangle particulier, la somme des angles est égale à deux droits, il en sera de même pour chaque triangle et l'hypothèse euclidienne subsistera. Cette dernière conclusion a été retrouvée un peu plus tard par Legendre, à la fin de ses longues études sur la théorie des parallèles.

J.-H. Lambert, dans sa *Théorie des parallèles*, publiée en 1786, mais qui paraît avoir été écrite vingt ans auparavant, discute de nouveau les trois cas de Saccheri, dont il pouvait connaître le travail suivant

une supposition plausible de Segre. Il arrive à cette conclusion : l'hypothèse de l'angle aigu ne peut pas être aussi facilement rejetée que celle de l'angle obtus qui contredit l'infinité de la droite.

En omettant l'œuvre de F.-C. Schweikart et de F.-A. Taurinus, que la critique historique d'Engel et Staeckel a revendiqués parmi les précurseurs les plus proches de la géométrie non-euclidienne, on peut dire que la constitution définitive de celle-ci est l'œuvre de Gauss, Lobatschewsky et Bolyai. Les études du premier, qui débutèrent entre 1792 et 1797 et se poursuivirent jusqu'en 1832, ne sont connues qu'à travers les lettres du grand géomètre. L'œuvre de Lobatschewsky est contenue dans des publications qui commencèrent à paraître dans le courrier de Kazan, en 1826; tandis que la première publication de son confrère hongrois Bolyai, sur le même sujet, remonte à 1829.

Lobatschewsky et Bolyai ont développé les conséquences de la troisième hypothèse de Saccheri, dans laquelle deux droites d'un plan, perpendiculaires à une troisième, vont en divergeant. Ce sont ces conséquences qui forment maintenant un système cohérent de géométrie abstraite dénommée par Gauss « géométrie non-euclidienne ». Ces développements fournissent la preuve de l'impossibilité d'une démonstration du postulat d'Euclide sur les parallèles, en le déduisant des postulats 1.-5. Cette preuve est implicitement contenue dans les formules de la trigonométrie non-euclidienne données par Lobatschewsky et Bolyai. Cependant ces géomètres ne réussirent pas à la mettre suffisamment en lumière pour exclure à jamais la possibilité d'une contradiction si loin que l'on poursuive l'étude de la géométrie non-euclidienne; et Gauss, qui pour son

propre compte était arrivé depuis longtemps aux principaux théorèmes de cette géométrie, semble avoir acquis la certitude de la possibilité logique de la géométrie non-euclidienne, vers 1830 seulement.

Ces détails n'ont aujourd'hui qu'un intérêt historique : la possibilité logique de cette géométrie et, par conséquent, l'indémontrabilité (dans le sens indiqué) du postulat des parallèles sont aujourd'hui hors de question.

De plus, on a reconnu qu'une *autre* géométrie est encore possible, quand on rejette des prémisses 1.-5 l'hypothèse de l'infinité de la droite (en considérant la droite comme une *ligne fermée*); on obtient ainsi un système de géométrie abstraite qui emprunte son nom à Riemann et est aussi cohérent que la géométrie de Lobatschewsky. Tandis que celle-ci correspond au développement de l'hypothèse de l'angle aigu, considérée par Saccheri, la géométrie de Riemann correspond à l'hypothèse de l'angle obtus.

Mais nous ne pouvons poursuivre l'énumération des acquisitions nettement obtenues par la science mathématique dans cet ordre d'idées, et nous nous dispenserons, par conséquent, de parler des contributions qu'ont apportées à ces recherches des mathématiciens comme Helmholtz, Cayley, Klein, Clifford, Lie, Poincaré, Véronèse, Hilbert. Nous y reviendrons, en partie, dans la suite. Pour l'instant, suivons les fondateurs de la géométrie non euclidienne dans les conceptions philosophiques que leur a suggérées leur découverte.

§ 9. **Le problème de l'espace.** — C'est un caractère de l'esprit humain d'être porté à chercher dans le monde réel des modèles concrets de ses créations conceptuelles. Cette tendance passe presque inaper-

çue chez les esprits qui ne sont pas familiarisés avec les sciences abstraites : les concepts qu'ils forment, résultant d'associations toutes proches de la perception sensible, jouissent de ce fait, dès leur origine, du caractère de représentations d'objets réels. Cependant, même dans ce cas, le processus qui généralise l'observation est un processus d'abstraction qui donne lieu à un concept auquel on tend, invariablement, à subordonner dans la suite les nouvelles observations. Mais quand il s'agit d'esprits formés aux disciplines abstraites, le processus constructif des concepts s'éloigne si démesurément alors des associations les plus proches de la perception sensible que la création idéale qui en résulte paraît tout à fait en dehors de la réalité. C'est pour cela, précisément, que la tendance à réaliser l'abstrait nous frappe comme une caractéristique de ces esprits.

Si quelqu'un tenait cela pour une tendance répréhensible des esprits mathématiques, on pourrait dire que son examen n'a pas dépassé la superficie de la question. Le défaut de l'esprit mathématique, dans ses moindres représentants, consiste précisément dans le contraire : c'est-à-dire à ne pas comprendre qu'une pensée qui se contente de constructions abstraites sans le plus vague espoir de saisir en elles le cadre d'une réalité quelconque est un instrument de stérile dialectique. « Percevoir dans tout concept abstrait la représentation possible d'une réalité », telle est l'idée directrice de tous ceux qui surent unir à la puissance d'abstraction une conscience élevée du but scientifique en vue duquel elle s'exerce. On ne saurait donc adresser nul reproche à ceux qui cherchent cette réalité *possible* derrière les constructions idéales qui s'éloignent des données de la perception immédiate. Leur audace ne deviendrait répréhensible qu'au cas où l'hypothèse possible serait acceptée comme vraie ou probable sans vérification suffisante, ou bien si, vérification faite, le savant cachait des faits qui se montrent contradictoires avec elle.

Les fondateurs des géométries non-euclidiennes furent évidemment audacieux en accordant à leurs développements abstraits la valeur d'une hypothèse réelle ; mais nul d'entre eux ne mérite le reproche précédent. Mathématiciens, ils furent en même temps des philosophes, en se posant une question qui équivaut à la plus haute victoire de l'esprit critique, et, philosophes, ils furent, au meilleur sens du mot, des positivistes, en cherchant une réponse à leurs doutes dans les faits qu'ils jugèrent sans idée préconçue.

Tandis que Kant travaillait à démontrer le caractère psychologique de l'intuition spatiale et à en détruire le sens physique, Gauss s'intéressait à des mesures plus précises de triangulation dans le Hartz, pour vérifier expérimentalement, au degré d'approximation qu'il convient d'observer sur la terre, la validité de la géométrie euclidienne ; et Lobatschewsky interrogeait les parallaxes des étoiles lointaines pour savoir si, dans ce nouvel ordre de grandeurs, il fallait considérer comme valable la théorie ordinaire des parallèles ou la remplacer par l'hypothèse non-euclidienne, poursuivant en cela une idée déjà exprimée par Schweikart qui, à cette géométrie, avait donné le nom d' « astrale ».

Cherchons à nous rendre compte du sens de ces observations.

D'après ce que nous avons dit, la question des parallèles peut être résolue théoriquement par l'examen d'un seul triangle. Si, dans celui-ci, la somme des angles est égale à deux droits, l'hypothèse démontrée est celle de d'Euclide ; si elle est plus petite

que deux droits, c'est celle de Lobatschewsky ; si elle est plus grande que deux droits, c'est celle de Riemann. Dans ces deux derniers cas, en désignant par α la différence entre la somme trouvée et deux droits, et par A l'aire du triangle, on peut poser

$$\frac{\alpha}{A} = -\frac{4}{\pi K^2},$$

ou

$$\frac{\alpha}{A} = +\frac{4}{\pi K^2},$$

et l'on peut démontrer alors que la valeur de K est indépendante du triangle particulier considéré. La constante $\frac{\alpha}{A}$ prend le nom de *courbure d'espace* (par suite de certaines analogies avec la théorie des surfaces) ; elle se réduit à $= 0$ dans l'hypothèse euclidienne, qu'on obtient comme limite des deux autres, pour $k = \infty$. Il s'en suit, par suite, que le problème des parallèles ne peut être résolu *physiquement* que si l'on prouve, à l'aide de mesures exactes, que la somme des angles d'un triangle est *sensiblement* plus petite ou plus grande que deux droits. Si cette somme se trouve être sensiblement égale à deux droits, deux hypothèses restent possibles :

a) la géométrie euclidienne est physiquement valable pour des mesures aussi précises qu'on le veut ;

b) une des deux hypothèses non-euclidiennes est valable, mais la courbure (négative ou positive) de l'espace est très petite, et, par conséquent, le paramètre k de Lobatschewsky est très grand, si grand que la différence entre la somme des angles de notre triangle et deux droits est inférieure à la limite des erreurs d'observation.

Or, précisément, les mesures les plus exactes des

triangles sur la terre conduisent, comme celui observé par Gauss, à une vérification de la géométrie euclidienne aux erreurs près d'observation. Il en résulte que la valeur de k dépasse une certaine limite par rapport aux dimensions terrestres.

Tournons-nous vers l'astronomie. Nous y rencontrerons des triangles de dimensions colossales par rapport à ceux que l'on peut observer sur la terre. Etant donné que le dénominateur de la fraction est

$$\frac{4}{\pi K^2}$$

on peut espérer que la quantité ϵ deviendra appréciable même si k dépasse la limite précédemment indiquée. Seulement, nous ne pouvons pas mesurer les *trois* angles d'un triangle céleste, dont on suppose que la somme diffère de α de deux droits, mais seulement *deux* de ces angles. Ainsi, par exemple, regarde-t-on une étoile de deux positions opposées sur l'orbite terrestre, par exemple des deux extrémités du grand axe de l'écliptique, on ne peut mesurer l'angle x sous lequel on voit l'étoile de cet axe, mais seulement les deux angles a et b formés avec celui-ci par les rayons visuels qui vont à l'étoile. Dans l'hypothèse euclidienne on a

$$a + b + x = 2\,R$$

et par conséquent l'angle x est donné par la *parallaxe* de l'étoile $2\,R - (a + b)$, que l'on a coutume de déterminer pour le cas où l'un des deux angles a, b est droit. Plus l'étoile est lointaine, plus sa parallaxe est petite, bien que conservant toujours une valeur positive.

Dans l'hypothèse de Lobatschewsky, les parallaxes de toutes les étoiles seraient supérieures à une cer-

taine limite (dépendante de k); au contraire, dans l'hypothèse de Riemann, les parallaxes d'étoiles très éloignées seraient négatives. Si les parallaxes des étoiles observées étaient toutes trouvées positives et supérieures à une certaine limite, on ne pourrait pas encore conclure que l'hypothèse euclidienne des parallèles est contredite. L'hypothèse la plus naturelle serait d'admettre que les distances de ces étoiles restent toutes inférieures à une certaine limite, ce qui n'empêcherait pas, du reste, d'instituer de nouvelles recherches, plus exactes, sur les triangles terrestres ou sur la mécanique du système planétaire, qui pourrait conduire à la vérification expérimentale de la géométrie de Lobatschewsky. Si, par contre, la parallaxe de quelques étoiles était trouvée négative, en maintenant l'hypothèse de la propagation rectiligne de la lumière, la preuve de la validité de la géométrie de Riemann en résulterait.

Mais l'observation nous apprend que les parallaxes des étoiles sont toutes positives ou sensiblement nulles; et c'est à ce résultat que nous conduit l'observation des étoiles les *plus proches*, c'est-à-dire de celles qui ont une parallaxe appréciable pour nos instruments.

De la parallaxe 1", Lobatschewsky déduit que son paramètre k dépasse 200.000 fois l'axe le plus grand de l'orbite terrestre, qui est d'environ 300.000.000 kilomètres. Il y a aussi des étoiles dont la parallaxe est plus petite que 0, 1", d'où il suit que k est 2.000.000 de fois plus grand que cet axe; et la majeure partie des étoiles sont encore plus éloignées, de sorte qu'il n'y a plus du tout de parallaxe appréciable.

En conséquence, l'espace physique peut être considéré comme euclidien, avec une approximation qui dépasse la précision actuelle de nos instruments les plus perfectionnés.

Telle est la conclusion de Lobatschewsky que l'on peut résumer en disant

Dans l'état actuel de nos connaissances, on doit considérer l'espace physique comme positivement euclidien.

Mais ceci ne comporte pas que les choses ne puissent être autrement, et il est injuste d'accuser les géomètres non-euclidiens d'avoir soulevé un doute qui est seulement écarté pour le temps présent et ajourné à un avenir peut-être lointain. Car, eût-on trouvé les parallaxes des étoiles supérieures à une certaine limite, il n'est pas probable qu'on se fût tenu à supposer que leur distance est inférieure à une certaine limite. Tout au moins, l'hypothèse de Lobatschewsky aurait présenté, dans ce cas, une forme mieux déterminée, en ce sens qu'on aurait pu choisir, pour le paramètre k, une valeur qui ne soit pas *trop* grande. Il fût devenu possible de la contrôler de diverses manières, comme on l'a indiqué, soit en cherchant à augmenter la précision des mesures terrestres et en en multipliant le nombre; soit en développant les conséquences mécaniques de l'hypothèse non-euclidienne à l'égard du système planétaire. Certaines divergences de la loi de Newton auraient peut-être pu trouver ainsi une correction suffisante. *A fortiori*, aurait-on possédé une base solide pour l'hypothèse de Riemann, si les parallaxes de quelques étoiles se fussent trouvées sensiblement négatives. Et qu'on n'aille pas dire, dans ce cas, qu'il eût suffi de renoncer à la propagation rectiligne de la lumière. Il est toujours facile d'arranger les choses *a priori*, quand on est sûr de ne pouvoir être démenti par l'expérience !

En effet, d'abord on ne pourrait y renoncer, comme nous l'avons vu, dans le cas d'une distribution homogène de la matière dans le milieu ambiant, sans ébranler par cela même la base commune des géo-

métries euclidiennes et non-euclidiennes; et, si l'on admettait une action de la matière sur la propagation de la lumière dans les espaces célestes, une telle action deviendrait, de diverses manières, accessible à une observation indirecte. D'ailleurs, la géométrie de Riemann est susceptible encore d'une autre vérification. En effet, suivant cette géométrie, la droite est une ligne fermée et finie (bien que très longue), de sorte qu'un astre lointain pourrait être visible en même temps pour deux observateurs placés sur la terre, aux antipodes. Enfin, répétons-le encore, quand bien même le problème des parallèles n'aurait pu recevoir une *solution* définitive des observations optiques dans le champ de l'astronomie stellaire, celles-ci auraient du moins eu le mérite de préciser le doute des géomètres non-euclidiens; et, en le rendant plus précis, de conduire à en chercher une confirmation indirecte dans le champ de la mécanique planétaire.

En affirmant la validité de la géométrie euclidienne à un degré d'approximation qui confine à celui de l'exactitude, nous voulons exprimer qu'aujourd'hui, en dehors des erreurs *accidentelles* inhérentes à l'application des hypothèses symboliquement exprimées par la géométrie, ces hypothèses ne comportent aucune erreur qui se révèle à l'examen de leurs conséquences directes ou indirectes. La valeur des doutes soulevés par Lobatschewsky réside dans l'aveu modeste que nous ne savons pas si de telles erreurs pourraient se constater dans un avenir lointain. C'est cette *possibilité* que contestent ceux qui n'admettent pas les arguments de la critique moderne au sujet de la validité *rigoureuse* de notre géométrie.

§ 10. **La non-représentabilité de la géométrie non-euclidienne.** — Que reste-t-il à objecter contre cette

possibilité? Rien d'autre sinon le vieil argument qui considère comme impossible ce qui est *inconcevable*, ou mieux, ce qui n'est pas susceptible d'être imaginé. Il est vrai qu'en dépit de la construction d'un système adéquat de concepts, nous nous trouvons dans l'*impossibilité psychologique de nous représenter les phénomènes réels dans un cadre spatial différent de celui de notre intuition ordinaire*. Mais ce *sentiment de nécessité* qui accompagne notre intuition de l'espace, ne nous révèle rien au sujet de sa structure, puisque la réalité physique n'est aucunement tenue de satisfaire à la représentation que nous en avons.

Pour éclairer la question, Gauss a adopté un argument suggestif, repris dans la suite par Helmholtz et Clifford, et qui est aujourd'hui généralement connu sous le nom du premier de ces deux philosophes. Imaginons de *petits êtres superficiels*, c'est-à-dire dispersés sur une surface, qui seraient libres de se mouvoir en glissant dessus. Douons ces êtres imaginaires d'une intuition spatiale capable de régler leur sensibilité et de diriger leurs mouvements dans cette étendue à deux dimensions qui constitue pour eux l'espace. Deux de ces petits êtres semblables, dont l'un se meut sur un plan, l'autre sur une surface légèrement courbe, pourraient être guidés par une même intuition géométrique, en tant qu'ils se représenteraient leur espace comme plan. Les faits qui permettraient au second de ces êtres d'acquérir la connaissance de la *courbure* de sa surface sans en sortir (puisqu'il ignore, par hypothèse, la troisième dimension), sont tout à fait analogues à ceux qui, à nous autres mortels, nous révéleraient la fausseté de la théorie des parallèles, prise rigoureusement. Mais ces faits échapperaient au contrôle de notre observateur dans le cas où celui-ci serait très petit par rapport à la surface

qui le contient et à sa courbure. Alors, si dans la société de ces petits êtres il se trouvait des philosophes, qui sait si l'un d'eux, par suite de l'intuition qu'il s'est formée de son milieu comme d'un plan, ne conclurait pas à la planéité rigoureuse et nécessaire de la surface? Les données de notre intuition de l'espace ne constituent donc pas un argument péremptoire dans le problème de la structure physique de l'espace.

§ 11. **Autres géométries possibles.** — Dans son écrit commémoratif : *A la mémoire de Gauss*, Sartorius déclare : « Gauss considérait la géométrie comme un édifice logique, en tant seulement qu'on accepte la théorie des parallèles comme un axiome; mais il était parvenu à la conviction que cette théorie ne pourrait être prouvée, bien que l'on sût, par l'expérience, qu'elle est positivement vraie. » Nous ignorons si la première partie de cette appréciation correspond vraiment aux vues les plus mûres de Gauss, et même nous sommes portés à en douter, en rappelant les observations qu'il fit avec le théodolithe pour vérifier le postulat de la droite euclidienne. En tout cas, l'opinion attribuée par Sartorius à Gauss, dans la première partie du passage cité, n'est pas acceptable, car on ne peut accorder à aucun des postulats de la géométrie le caractère d'axiome logique, et chacune des définitions des entités fondamentales de la géométrie (vicieuse du point de vue logique) comporte en soi un postulat d'existence.

Nous avons déjà observé que les propriétés fondamentales de la ligne droite impliquaient positivement l'hypothèse d'une certaine symétrie entre les phénomènes, c'est-à-dire d'un système de concordances, sans lequel il serait impossible de rassembler et de

coordonner tant de faits divers sous *une même* représentation géométrique. De cette hypothèse, nous pouvons dire qu'elle est, pour le moment, confirmée par toutes nos expériences, et rien de plus. Une appréciation quantitative du degré de rigueur qu'il convient de lui attribuer ne nous semble pas tâche facile, bien que nous ne commettrions assurément pas d'erreur en affirmant que son exactitude relative est colossalement grande.

Mais si on accepte aussi, comme postulats, les hypothèses qui constituent le fondement de l'*unité* de la géométrie (métrique, optique, etc.), il ne faut pas croire pour cela qu'*un seul* système géométrique soit possible, une pangéométrie dans laquelle seule la question des parallèles reste ouverte. Au contraire, les plus récentes recherches mathématiques nous apprennent que des systèmes géométriques en nombre infini restent encore possibles, non seulement logiquement, mais même physiquement. Citons, par exemple, les formes spatiales de Clifford-Klein, qui admettent des propriétés physiques de l'espace radicalement différentes pour un observateur contenu dans les limites étroites de notre expérience, et pour un autre qui pourrait notablement les élargir.

§ 12. **La géométrie non-archimédienne et l'arbitraire des postulats.** — Dans les exemples précédents, les *postulats* qui correspondent aux diverses géométries expriment des *hypothèses physiques différentes*. Leur différence, que n'ont pu mettre encore en lumière les expériences actuelles, reste virtuellement constatable par rapport à des expériences ultérieurement possibles. Mais on peut construire, et on a en effet construit, dans ces dernières années, d'autres géométries, logiquement différentes, qui, pourtant, ne cor-

respondent à aucunes hypothèses physiques distinctes. Le plus bel exemple nous en est offert par la *géométrie non-archimédienne*, due à G. Véronèse et récemment développée par D. Hilbert et son école.

Cette géométrie prend son point de départ dans la négation du postulat dit d'Archimède, dont on démontre l'indépendance vis-à-vis des autres prémisses géométriques ordinaires, en admettant « l'existence de segments tels que tout multiple de l'un d'eux, quelque grand qu'on le prenne, reste toujours plus petit qu'un autre segment donné ».

Une telle hypothèse, qui possède un sens mathématique précis comme rapport entre certains concepts, n'a *pas de sens physique*, parce qu'elle n'est nullement accessible à l'expérience : un segment (*infiniment petit actuel*), moindre que tout sous-multiple de notre unité de comparaison, se trouverait défini d'une façon transcendante par rapport à celle-ci et par rapport à nos sens (par exemple à l'organe tactile), de sorte que l'hypothèse d'un tel segment n'exprime directement aucune donnée susceptible de tomber sous notre perception sensible.

Mais, bien plus, cette hypothèse ne possède même pas de signification physique indirecte. En effet, Véronèse a démontré qu'on peut considérer les théorèmes de la géométrie non-archimédienne, avec un *degré d'approximation infiniment élevé*, comme identiques à ceux de la géométrie ordinaire, d'où cette conclusion : « *la géométrie archimédienne et la géométrie non-archimédienne expriment, au moyen de systèmes différents de concepts, le même système d'hypothèses sur les rapports de position des corps.* » En conséquence, « *des postulats qui revêtent des formes différentes peuvent exprimer la même réalité physique* ».

La géométrie non-archimédienne offre une illustration intéressante de ce *caractère arbitraire des postulats* vis-à-vis du monde réel, caractère arbitraire que F. Klein a mis en lumière dans son discours de Kasan, et que Poincaré prend, à notre avis, dans un sens trop étendu, en considérant tout postulat comme une *convention*. Les postulats comportent, en effet, un élément conventionnel, en ce sens qu'il existe « des systèmes de postulats exprimant, de différentes façons, les mêmes hypothèses physiques » ; mais, à côté de ces systèmes de postulats équivalents, il en est d'autres, comme nous l'avons vu, non plus équivalents, mais répondant à des possibilités physiques susceptibles d'être distinguées par l'expérience. Un choix arbitraire, déterminé seulement par les exigences *économiques* de la représentation spatiale, ne nous est permis que quand il s'agit des systèmes de postulats équivalents, ou de systèmes non équivalents que l'expérience actuelle n'a pas réussi encore à distinguer ; mais, dans le premier cas, le choix est purement *conventionnel* et libre ; dans le second, il contient une hypothèse de fait et anticipe ainsi le résultat d'expériences possibles, impliquant pour l'hypothèse la possibilité même d'être contredite.

CHAPITRE III

LES DONNÉES SPATIALES DES SENS ET LA GENÈSE PSYCHOLOGIQUE DES CONCEPTS GÉOMÉTRIQUES.

§ 13. **Position du Problème.** — Nous avons vu que l'interprétation de l'expérience conduit à admettre différentes géométries physiques possibles, et que la critique mathématique dévoile la possibilité de représenter un même ensemble d'hypothèses sur l'espace réel au moyen de systèmes différents de concepts et de postulats. Mais, malgré l'arbitraire que comporte toute construction géométrique, c'est un fait certain que l'intuition, telle que nous la trouvons formée dans chaque esprit, opère un choix en construisant la représentation d'un espace psychologique défini. De là, le problème pour le psychologue de rendre compte de cette intuition.

Mais, dans quel sens faut-il en chercher l'*explication* ? La réponse oscille entre deux points de vue opposés qui se disputent le champ : le *nativisme* et l'*empirisme*. De la *thèse* kantienne : « les rapports spatiaux sont des rapports établis par l'esprit entre les sensations possibles », dérive le nativisme qui rattache l'intuition de ces rapports à la structure anatomo-physio-psychologique de l'homme. De la thèse

que « les rapports spatiaux font partie des données des sens (vue, tact, etc.) », la philosophie empirique conclut que l'intuition des relations spatiales est la simple répétition de sensations antérieures et se réduit finalement à une somme de connaissances et de faits fournis par la perception sensible.

Les prémisses du nativisme et de l'empirisme paraissent, jusqu'à un certain point, également vérifiées ; mais les conclusions qu'on en tire sont unilatérales et incomplètes. Le nativisme cherche comment on peut se représenter un esprit, formé antérieurement à l'exercice des sens, et indépendant du monde extérieur ; l'empirisme, au contraire, réduit toute l'activité psychologique à une réceptivité passive.

Les deux points de vue se peuvent concilier quand on essaie d'*expliquer l'intuition spatiale comme le résultat d'un développement psychologique de perceptions sensibles, dans lequel on tient compte de la structure de l'esprit*.

§ 14. **Le problème biologique de l'orientation spatiale.** — Mais le problème se complique d'une recherche biologique apparemment préjudicielle.

A la thèse empiriste que les rapports de position font partie des données des sens, les naturalistes objectent : « une connaissance des rapports de position des corps est implicitement contenue dans l'usage même des sens (adaptation de l'organe sensoriel à l'objet) ». C'est le problème de l'*orientation spatiale*, c'est-à-dire de la *coordination des mouvements aux sensations*, auquel beaucoup estiment que se ramène le problème psychologique.

Une fois les termes du problème ainsi transposés, la théorie de l'évolution élargit la recherche de l'homme à l'animal, et de l'individu à l'espèce. L'em-

pirisme s'unit à la théorie épigénétique de Lamarck dans la doctrine de Spencer, qui considère l'orientation spatiale comme une acquisition dérivée de l'usage habituel des sens, transmise par hérédité et fixée dans le patrimoine actuel de l'espèce. Au contraire, le nativisme trouve son expression biologique dans les théories préformistes et néo-préformistes qui recherchent systématiquement la cause de la variation phylogénétique dans les conditions mécaniques, physiques et biologiques intérieures à l'être vivant, laissant au principe darwinien de la sélection naturelle l'office de résoudre le contraste de l'individu avec le milieu.

Nous n'avons pas l'intention, pour notre compte, d'envisager le problème de l'espace sous ce point de vue. Qu'il nous suffise de remarquer que la substitution de la doctrine spencérienne à l'empirisme primitif équivaut déjà à reconnaître quelque chose d'inné dans l'orientation spatiale de l'homme ou de l'animal. De ce que nous venons de dire, nous voulons précisément retenir que : « le développement de la coordination des mouvements aux sensations, c'est-à-dire de l'orientation spatiale, tant chez l'animal que chez l'homme, est le produit d'expériences exécutées dans certaines conditions anatomo-physiologiques », sans rechercher si, et dans quelle mesure, ces conditions doivent être rattachées aux lois mécaniques de l'organisme.

Mais protestons, tout de suite, contre la prétention de certains philosophes néo-kantiens de voir le reflet de ces conditions structurales anatomo-physiologiques de l'organisme humain dans certains caractères *a priori* de l'intuition spatiale, de manière à conférer à la géométrie ses postulats, dès que les concepts fondamentaux en ont été fournis par les sensations. Ainsi Wundt dans ses « Eléments de psychologie » veut dériver la planéité de l'espace intuitif de la disposition des os apte à favoriser le mouvement rectiligne, au lieu qu'il est évident au contraire que les membres osseux articulés se comportent presque comme des pendules composées, dont le mouvement rectiligne ne peut être obtenu sans compensations compliquées. E. G. Heymans, se proposant d'une façon très précise l'explication psychologique des postulats géométriques, considère la droite comme une « ligne d'innervation uniforme » (?) et prétend déduire de là, *a priori*, sa propriété fondamentale d'être déterminée par deux points, au moyen d'un symbolisme analytique, dont l'application me semble absolument arbitraire.

A de telles tentatives nous opposerons le fait préjudiciel suivant : l'orientation, bien que dépendante de la structure anatomique, n'est perçue par la conscience qu'au moyen de certaines sensations (musculaires, tactiles, visuelles, etc.) ; et les données brutes de ces sensations ne permettent pas d'écarter l'arbitraire inhérent au choix des postulats et, notamment, de leur conférer ce caractère d'exactitude que l'on reconnait aux rapports spatiaux représentés dans notre intuition.

Il s'agit donc, ici, d'un développement psychologique, d'une élaboration et d'une schématisation des données des sens, dont les conditions subjectives sont à rechercher dans l'activité de l'esprit et non dans l'anatomie du système musculo-osseux.

§ 15. **Programme des recherches ultérieures.** — Notre analyse parviendra à représenter ce développement comme un *processus d'association et d'abstraction, et à réduire les conditions précédentes aux lois de*

l'activité logique, dans laquelle nous trouverons l'explication de certains caractères formels des postulats et du sentiment d'évidence ou de nécessité qui s'y rattache. Plus précisément, après avoir reconnu la *genèse des concepts géométriques*, dont les postulats expriment les rapports, nous verrons comment ces postulats se laissent décomposer en deux parties : l'une consistant simplement dans l'énoncé d'un fait nullement évident, mais qui se présente comme une *condition* pour réunir en un seul concept une certaine série de représentations différentes qu'on peut poursuivre à l'infini ; l'autre se réduisant, en principe, à un axiome d'ordre logique qui se rattache à la fonction logique de la pensée.

Le concept d'une figure étant considéré comme représentatif d'un objet réel qui correspond à plusieurs sensations associées, l'existence ou la possibilité d'un objet hypothétique, répondant à un groupe donné de sensations, constitue le *fait géométrique* exprimé par les postulats. Par contre, la *forme* sous laquelle ils se présentent à l'intuition du géomètre et l'évidence qui s'y rattache tiennent aux *propositions logiques qui se superposent* à l'appréhension de ce fait.

§ 16. **Sources de la critique.** — Mais on ne peut pénétrer plus avant dans le sens de l'explication suggérée, si on ne résout préalablement le problème de la genèse des concepts géométriques.

Les faits qui méritent d'attirer notre attention appartiennent d'un côté à la psycho-physiologie, de l'autre à la géométrie. Il appartient à la physiologie de nous indiquer de quelle manière les rapports d'extension sont perçus par la vue, le tact ou les sensations musculaires ; mais, pour interpréter convenablement ces résultats, il faut savoir comment les rapports perçus

se rattachent aux concepts géométriques fondamentaux.

Le seul point de vue physiologique ne réussit pas à dépasser le problème de la distinction des sensations simultanées, de la localisation d'une sensation ou de la détermination d'une position dans l'espace, problèmes qui, selon la juste observation de G. Cesca, n'ont encore rien à voir avec l'explication psychologique de l'acquisition des notions d'espace.

Helmholtz a bien compris la nécessité qui se présente ici de diriger et d'interpréter la recherche physiologique à la lumière d'une critique des postulats de la géométrie. Mais il semble qu'on ait oublié son enseignement après lui, et c'est pourquoi précisément le travail expérimental, poursuivi de différents côtés, n'a pas donné tout le profit qu'il laissait espérer.

Entre temps, les recherches sur les principes de la géométrie, qui à l'époque de Helmholtz commençaient à peine à tirer profit des ressources fournies par les branches les plus élevées des mathématiques, ont acquis, grâce à elles, un développement considérable, et les résultats obtenus depuis la seconde moitié du siècle précédent jusqu'à nos jours sont de telle nature qu'un physiologiste s'occupant du problème psychologique de l'espace ne peut les ignorer.

§ 17. **Remarques générales sur le contenu spatial de notre perception.** — On peut trouver un caractère spatial dans toute sensation. Chez les chiens, il semble que l'odorat participe à l'orientation d'une façon éminente, et chez l'aveugle-né les représentations spatiales se rattachent habituellement au sens de l'ouïe selon le témoignage d'Hitschmann. Mais chez l'homme, en général, c'est à l'association des sensations musculaires, tactiles et visuelles, en connexion avec les mou-

vements, que sont dues les représentations spatiales.

Celles-ci ont pour objets les *points*, les *lignes* et les *surfaces*. Les lignes peuvent s'*engendrer* par le mouvement d'un point, et les surfaces par le mouvement d'une ligne; pourtant les lignes et les surfaces, sitôt qu'on les considère comme réalisées, répondent à des groupes de sensations différentes de celles fournies par déplacement de l'élément générateur. De là, une double façon de se représenter les lignes et les surfaces, sur laquelle nous voulons tout de suite attirer l'attention : une façon *génétique* et une façon *actuelle*. Nous devons considérer la représentation complète que nous nous formons d'une ligne ou d'une surface comme dérivée, par association, des deux groupes de sensations qui correspondent aux deux façons de l'envisager.

Cela n'est pas seulement vrai de la ligne et de la surface : le *point* déjà ne doit pas être envisagé comme l'*objet d'une seule sensation*, mais d'*un groupe de sensations associées*. Affirmer l'existence d'un point possède, avant tout, une signification relative à la position de l'observateur et implique l'attente que certaines sensations musculaires, déterminant subjectivement certains mouvements, sont accompagnées ou suivies de certaines sensations tactiles et visuelles. C'est seulement au cas où s'établit une relation entre un sens expressif et un sens réceptif que l'on peut parler de « perception d'un point ».

Cette opinion nous conduit à résoudre le problème de la *localisation spatiale*, selon la *théorie associationniste* de Bain, Taine et Delbœuf.

Si l'on ajoute que la *distinction des sensations simultanées du tact ou de la vue* est rendue possible grâce aux *signes locaux* de Lotze, c'est-à-dire en tenant compte des différences entre les points de la peau et

ceux de la rétine, notamment dans leurs rapports avec les points voisins, on obtient ainsi une solution assez satisfaisante du problème physiologique de la possibilité de « *déterminer une position dans l'espace* ».

§ 18. **Les espaces physiologiques et l'espace géométrique.** — Puisque la constatation d'un point comme fait brut dépend de la position de l'observateur, et qu'un changement de celle-ci lui fait apparaître comme différents les rapports entre divers points, il s'ensuit que l'ensemble des points ainsi considérés constituent un *espace physiologique* propre à l'observateur, et différent de *celui des géomètres*. Cette distinction fondamentale se trouve dans l'*Analyse des sensations* de E. Mach, et dans les recherches, citées par lui, de Hering.

D'autres auteurs ont appliqué leur attention sur ce que l'espace physiologique visuel, tactile ou musculaire ne possède pas les caractères d'homogénéité et d'isotropie que nous attribuons à l'espace géométrique; H. Poincaré, par exemple, dans son livre déjà mentionné. Cela nous paraît, du reste, si évident qu'il est inutile d'insister.

De telles constatations conduisent à se demander comment des données brutes des sensations spatiales on s'élève à la représentation de l'espace géométrique. Aux associations sensorielles, il est nécessaire de joindre ici un *processus d'abstraction*. Dire que « *le concept géométrique de l'espace est abstrait des différents espaces physiologiques possibles, par rapport à un observateur en mouvement* » n'est pas une réponse suffisante à la question posée, tant que l'on n'a pas mis en lumière, d'une part, comment l'espace physiologique lui-même se rapproche, grâce à des associations et abstractions, d'une représentation quasi-géo-

métrique relative à l'observateur, et, d'autre part, comment tous les éléments de dissymétrie afférents aux divers espaces physiologiques peuvent s'éliminer dans leur comparaison.

Renvoyant la première question à une analyse plus exacte des données sensibles, nous observerons, en ce qui concerne la seconde, qu'une dissymétrie systématique est créée, à l'égard du mouvement de l'observateur, par rapport à la verticale selon laquelle s'exerce la pesanteur.

De là, nous nous croyons autorisé à conclure que le passage de la représentation physiologique de l'espace à sa représentation géométrique est dû, en premier lieu, à la comparaison des différents *espaces visuels* possibles, dans lesquels s'éliminent déjà des éléments hétérogènes provenant d'autres sens, comme cette dissymétrie mécanique qui ne subsiste plus à l'égard des phénomènes optiques.

Passons, maintenant, à la discussion particulière des éléments conceptuels de la représentation de l'espace fournis par les différents sens. La méthode que nous suivrons répondra surtout au désir de rendre plus accessibles nos idées à ceux qui ne possèdent aucune préparation mathématique spéciale dans ce domaine, et de montrer, clairement, la nécessité des considérations de ce genre dans une semblable question.

§ 19. **Les données spatiales de la vue et la géométrie projective.** — Il nous suffira d'extraire des nombreux résultats obtenus sur la physiologie de la vue (grâce aux recherches de Lotze, Weber, Volkmann, Fechner, Helmholtz, Panum, Donders, Hering, Wundt, James, Mach, etc.) un schéma fondamental du processus de la vision, sans entrer dans une discussion approfondie des détails.

Les faits élémentaires de la vision sont :

1° La formation de l'*image* sur la rétine, équivalant à une projection centrale plane de l'objet;

2° Les *mouvements de l'œil*, s'effectuant normalement autour du centre de Donders, et obéissant, d'une façon approximative, à la *loi* de Listing et à celle de l'*orientation constante* qui en dérive;

3° La *fusion normale des images* correspondantes dans la *vision binoculaire*. A cet égard, il est à remarquer que la fusion se fait normalement, non seulement quand les images se forment sur des points *identiques*, occupant une même position, des deux rétines, mais même entre certaines limites, pour les images correspondant à un même point extérieur, dès que s'est produite, en vertu de différentes circonstances accessoires, une *accommodation* convenable de l'organe; le point unique est vu à peu près dans la direction du rayon qui forme la bissectrice de l'angle compris entre les deux rayons visuels.

Nous nous trouvons, maintenant, à même de discuter le problème fondamental toujours débattu : *la vue nous donne-t-elle la perception immédiate de la distance de deux points, c'est-à-dire de la grandeur d'un objet?*

Le fait simple de la vision binoculaire, après l'accommodation de l'organe, se présente comme une *projection bicentrale*, c'est-à-dire comme une projection double simultanée de l'objet de deux centres sur deux plans. Si nous demandons aux mathématiciens que conclure de cette représentation, ils devront recourir aux études sur la *photogrammétrie*, à laquelle se rattachent les travaux récents de Hauck et de Finsterwalder.

Deux projections d'un objet suffisent pour le reconstruire, quand le *système de projection*, c'est-à-dire les

centres et les plans respectifs, est *donné*. Alors, la distance de deux points, dont on spécifie les images, peut être déterminée en se basant sur certains *éléments métriques* appartenant au *système en question*, c'est-à-dire sur la distance des centres de la vision des deux rétines respectives, et sur l'inclinaison de leurs plans pour toute accommodation donnée de l'œil. A défaut de ces éléments, quatre images d'un objet suffisent pour le reconstruire, à une similitude près; cinq images, entre lesquelles se trouvent les relations nécessaires, en déterminent, en outre, la grandeur. Comment doit-on interpréter ces résultats au sujet de notre problème?

Les données visuelles inhérentes aux multiples images que nous pouvons nous former d'un objet en remuant les yeux contiennent les éléments dont on peut déduire mathématiquement la comparaison des distances; mais ceci n'*a aucun sens* pour les images isolées; il s'en suit qu'on ne peut considérer l'appréciation des distances comme donnée immédiatement par la vision binoculaire, puisque les éléments métriques des systèmes correspondants de projection sont en partie des données anatomiques et, en partie, des données qui dépendent de l'accommodation et qu'on ne peut considérer comme *connues* de l'observateur *avant* l'expérience visuelle et les comparaisons et associations qu'elle implique avec d'autres sens. Ainsi, l'extension du rôle de la vue à la perception de la forme et de la grandeur des objets est le résultat d'une acquisition empirique.

La nécessité de tenir compte, dans cette extension, d'autres sensations associées à la vue résulte aussi de la théorie qui considère le sens visuel comme le résultat d'une différenciation, au cours de l'évolution, de la sensibilité tactile générale. Dans ce cas, on doit

admettre une certaine perception immédiate des distances, purement subjective, d'après laquelle on perçoit avec l'œil la *distance apparente* de deux points, en se basant sur la longueur de leur perspective sur la rétine. Cet élément d'appréciation inné, qui est aussi en relation avec les sensations musculaires inhérentes aux mouvements de l'œil, ne peut être corrigé que par une expérience plus étendue, où interviennent les mouvements de l'observateur et les autres sensations qui leur sont connexes.

Les inductions précédentes reposent sur la considération anatomo-physiologique de l'organe visuel. Elles sont corroborées par l'étude de la question au point de vue psychologique. Entre les multiples faits établis par Helmholtz et son école, citons en particulier l'*erreur* qui se rencontre, en un grand nombre de cas, dans la *comparaison des distances*. L'expérience a montré que ce jugement comparatif (dont la possibilité est limitée à un champ assez restreint) est dénué d'uniformité et d'exactitude, quand les distances comparées sont à des distances inégales, et qu'il devient beaucoup plus imparfait encore, si elles ont des directions différentes. Il convient d'ajouter l'erreur qui s'introduit dans l'évaluation du parallélisme de deux droites, plus sensible encore que celle inhérente à l'estimation de leur convergence, etc. Helmholtz a expliqué ces faits, en considérant précisément l'appréciation comparative des distances comme n'étant pas une donnée immédiate de la vue, mais une acquisition due à l'habitude d'associer ses données avec les sensations tactiles et musculaires.

Tout ce qui précède nous autorise à considérer ces distinctions comme fondées. Reconnaissons donc comme *données immédiates de la vue* l'ensemble des propriétés géométriques de l'objet qui se traduisent

en *propriétés projectives* indépendantes de la position particulière de l'objet et de son éloignement des yeux. Les longueurs ou les distances ne figurent pas parmi celles-ci, et on doit les considérer comme une acquisition empirique médiate, obtenue par l'association des sensations tactiles et musculaires, et non par celle des sensations visuelles qui proviennent d'un changement de position de l'observateur.

Mais ceux-là ne peuvent interpréter justement ces conclusions, qui n'ont pas acquis certaines notions fondamentales de la géométrie moderne. C'est précisément à cette ignorance que l'on doit les déductions bizarres autour desquelles certains philosophes s'agitent encore.

A défaut d'une appréciation comparative des distances entre les points et, par conséquent, des dimensions des objets, on pourrait penser que toute notion géométrique est étrangère aux données immédiates de la vue. On ne peut rectifier cette erreur que par une étude de la géométrie projective, telle que l'ont développée, au siècle dernier, Poncelet, Möbius et Steinert, jusqu'à ce qu'elle eût trouvé sa constitution définitive et autonome dans le système de Staudt. Elle seule peut nous donner l'idée d'une science qui étudie les *rapports qualitatifs* inhérents aux concepts élémentaires de la *droite* et du *plan*, rapports absolument indépendants des *rapports quantitatifs* (ou métriques) supposés par l'idée de distance, bien qu'on les exprime ordinairement à l'aide de ces derniers.

Précisément, *la droite et le plan se distinguent* par les propriétés optiques dont ils jouissent *dans la vision;* la droite parce que ses images rétiniennes sont droites, et le plan par ses relations avec la droite qui se traduisent dans une *correspondance projective* entre les images.

Ces distinctions se rapportent, comme il appert, à la vision binoculaire. Cependant, dans la vision monoculaire, la droite et le plan ont encore un caractère distinct, quand ils passent par le centre de l'œil. La droite est alors un *rayon visuel* et son image se réduit à un point unique; le plan est vu comme une droite. Ces représentations particulières de la droite et du plan s'associent à leurs représentations générales et déterminent, comme nous le verrons, quelques-unes des propriétés fondamentales de l'intuition que nous avons de ces figures.

C'est une circonstance digne d'être notée que, par rapport à la vision binoculaire, une surface courbe se distingue d'une surface plane, parce que c'est à elle que se rattache la sensation de *relief*. Le relief est donc un caractère de la représentation visuelle d'une surface inhérent à son aspect actuel. La correspondance rétinienne s'écarte d'une correspondance projective, lorsque les mêmes lignes de la surface qui ont pour images sur une rétine des droites, ont pour images sur l'autre rétine des courbes.

Ce mode de distinction, qui se rattache aux données immédiates de la vision binoculaire, n'a rien à voir avec les sensations musculaires qui accompagnent les mouvements de l'œil quand on passe de la vision d'une surface courbe à la vision d'une surface plane. Dans le premier cas, on a un critérium de la courbure qui dépend, en un certain sens, de la considération de la surface en soi, c'est-à-dire de ses propriétés *intrinsèques*. Dans le second cas, cette courbure est évaluée par les relations *extrinsèques* de la surface avec ce qui l'entoure.

Nous possédons ainsi, à côté des différentes représentations génétiques possibles des surfaces, une représentation actuelle de leur relief. Elle se présente

à nous sous le même aspect qu'une surface qui limite notre horizon visuel.

Nous ne croyons pas qu'on puisse aller plus loin et arriver à une *représentation actuelle des objets à trois dimensions*. Ces objets correspondent, dans notre esprit, à une succession d'images superficielles, ou au concept abstrait d'une série de successions associées; mais dans la vision adaptée, ils ne se présentent jamais comme une donnée propre des sensations.

Les arguments de Stumpf, prétendant le contraire, semblent, à notre avis, comporter un cercle vicieux. L'illustre psychologue veut dériver la nécessité de la représentation des trois dimensions du fait qu'une surface a *deux faces*, centres de courbure *extérieurs* à elle, etc.; mais ces considérations introduisent déjà implicitement comme *donnée* la troisième dimension qu'on veut génétiquement *construire*. En effet, la représentation actuelle d'une surface comme limite de notre horizon visuel ne comporte qu'*une seule face*, si bien que le concept d'une double face dérive de la superposition d'images *successives*, etc.

Dire que les données immédiates de la vision nous offrent les notions de droite et de plan revient à affirmer que *la vue nous fournit les éléments constructifs de la géométrie projective*. Par conséquent, l'espace visuel immédiat, tel qu'il résulte par abstraction des différents espaces visuels possibles, indépendamment de toute association métrique, est un *espace projectif;* et, comme la droite peut être conçue optiquement comme prolongée aussi loin qu'on le veut, cet espace apparaît comme *illimité*. En fait, ce caractère de l'espace est conçue assez tardivement. Il faut, en effet, un effort notable d'abstraction pour y aboutir, en partant de cette constatation que

l'horizon visuel s'élargit quand on avance à sa rencontre.

En tout cas, il reste comme particularité de la représentation optique de l'espace ce fait que deux points très éloignés, pris dans des directions opposées, ne peuvent jamais être directement comparés. Il s'en suit que, dans l'espace projectif visuel, deux parallèles, conduites par un point aux deux rayons opposés d'une même droite, n'apparaissent pas nécessairement comme coïncidentes. Au moins, la coïncidence ne pourra-t-elle être reconnue immédiatement, et, tant qu'elle ne le sera pas, l'espace projectif visuel n'aura pas dans notre esprit toute l'extension que nous lui attribuons. Pour parler le langage des mathématiciens, l'espace projectif, dans ses représentations optiques les plus immédiates, se présente comme intérieur à une *surface-limite impropre* du deuxième degré. Nous verrons plus tard comment les associations tactiles obligent à élargir ultérieurement cet espace projectif jusqu'à la représentation euclidienne, où la surface-limite impropre se réduit à un plan.

§ 20. **Les données spatiales des sensations musculaires et tactiles et la géométrie métrique.** — Sans discuter la question de savoir s'il existe une sensation musculaire *sui generis*, — une réponse préalable sur ce point n'étant pas requise par la nature des questions que nous avons en vue — il nous suffira de rappeler certains faits fondamentaux :

1° Les sensations tactiles et, notamment, celles de la pression sont rapportées à l'endroit de la peau qui a été touché (*signes locaux de Lotze*); mais la désignation d'un tel endroit est entachée d'une erreur variant considérablement de position en position, si bien que deux points, dont la distance sur une cer-

taine région de la peau est inférieure à un intervalle donné, ne sont pas perçus comme distincts (*seuil de la sensation*);

2° Une longueur constante est perçue inégalement longue sur différentes régions de la peau, c'est-à-dire plus grande là où la finesse de la sensation est plus grande (expérience avec le *compas* de Weber);

3° La grandeur d'un objet mobile sur la peau est perçue avec plus d'exactitude que ne l'est la grandeur d'un objet en repos sur une région déterminée de la peau, et l'exercice accroît notablement cette faculté;

4° Au sens de la pression s'opposent *ceux de l'effort et du mouvement musculaire.* A ce dernier, se rattache la fonction encore mal définie des *canaux semi-circulaires* de l'oreille, dans les sensations d'équilibre et d'orientation (Goltz et Mach).

Cela nous amène à quelques observations sur le contenu spatial du sens tactilo-musculaire : tout d'abord, aux expériences de Fechner et Weber sur le seuil des sensations tactiles et la perception des longueurs égales comme inégales. L'existence d'un seuil de la sensation n'appartient pas seulement au tact, mais aussi à la vue. Elle a une signification très importante, en tant qu'elle nous montre que l'*espace physiologique* (tactile ou visuel) *n'est pas continu :* dès lors se présente le nouveau problème d'expliquer comment le processus d'abstraction et d'association, par lequel on arrive à la représentation de l'espace géométrique en partant des différents espaces physiologiques possibles, conduit à un espace continu.

Le second point qu'il importe de relever est le suivant : la comparaison des distances ou longueurs et, en général, des grandeurs des objets exige que l'on se réfère à un organe tactile choisi comme siège d'un étalon de mesure constant. Cet organe tactile doit

être mobile tout en restant invariable, et adaptable aux objets, afin que des objets différents puissent être ainsi métriquement comparés. Il devient un véritable organe de *tact spécial* différencié en vue des discriminations métriques. Cet organe, pour l'homme, est normalement la main, mais il peut être remplacé, et l'est effectivement, dans certains cas, par le pied ou toute autre partie du corps. On doit admettre, ensuite, que le tact spécial ayant permis à l'homme de reconnaître bien vite l'invariabilité des solides dans leurs mouvements, on s'est servi de ces derniers comme instruments plus précis de comparaison et de mesure.

Une pointe qui court sur la peau ou la lame d'un couteau appuyée à l'état de repos nous fournissent deux images tactiles de la ligne : la première génétique, la seconde actuelle. Si la lame glisse sur la peau en la rasant légèrement, on obtient la représentation génétique des surfaces; la représentation actuelle, qui en est distincte et lui est seulement unie par association, correspond à une lamelle d'une certaine longueur appuyée au même endroit de la peau.

La forme d'une surface et, notamment, son caractère d'être plan ou d'être courbe, peuvent être donnés par la représentation actuelle, rapportée à certaines régions de la peau applicables à la surface en question. Ainsi, par exemple, à la main étendue ou courbée correspondent évidemment différentes sensations de contraction musculaire. Mais la représentation tactile des trois dimensions n'est obtenue que génétiquement. Elle nous est fournie par la successions des impressions tactiles d'une surface mobile, adhérente à une partie de la peau qui se déplace avec elle. Les organes du tact spécial ont, dans tout cela,

une fonction prépondérante, bien qu'encore non indispensable.

Parmi toutes les lignes et les surfaces, les *cercles* et les *sphères* se distinguent immédiatement en ce que leur reconnaissance est due au tact spécial, leur génération se rattachant à la comparaison des distances. Quant à la *droite* et au *plan*, leur distinction nous semble, en grande partie au moins, une acquisition médiate. Il est vrai que certains os sont *grosso modo* rectilignes, mais ce caractère particulier ne peut arrêter l'attention jusqu'à ce qu'on ait rencontré d'autres propriétés remarquables de la droite, comme, par exemple, d'être l'*axe de rotation* des corps solides ou la *ligne de plus courte distance*. Une définition musculaire de la droite est aussi possible, en se fondant sur ses propriétés mécaniques. Mais, tout bien pesé, il semble que les *éléments constructifs primordiaux*, qui jouent un rôle prépondérant dans la formation de l'*espace tactile et moteur, ne sont pas les notions de la droite et du plan, mais celle de la distance* et, par conséquent, du *cercle* et de la *sphère*. On peut exprimer cette dernière conclusion en disant : l'*espace tactilo-moteur* et, notamment, celui fourni par l'organe du *tact spécial* est l'*espace métrique*, dont les propriétés résultent des propriétés fondamentales de la *distance*.

Que cet espace et la ligne droite en lui soient *illimités*, c'est ce qui résulte de la possibilité de transporter l'organe du tact spécial, ou un objet quelconque, de manière à donner lieu à une succession de longueurs égales que l'on peut poursuivre indéfiniment. Il n'en résulte pas nécessairement l'*infinité* de l'espace même, Les longueurs consécutives, placées bout à bout en ligne droite (opération qui, au point de vue abstrait, doit être conçue comme indéfiniment poursuivable),

pourraient bien arriver à se superposer après avoir rempli un intervalle suffisamment long. L'expérience nous apprend seulement que cela n'arrive pas dans le champ accessible à notre expérience. L'espace métrique, dont la représentation nous est fournie par les sensations élémentaires tactiles et musculaires, pourrait tout aussi bien être lobatschewskien ou riemannien qu'euclidien. Nous verrons, plus tard, comment le choix de la représentation euclidienne, pour l'homme normal, est le résultat de l'association des sensations tactiles et visuelles.

CHAPITRE IV

LA GENÈSE PSYCHOLOGIQUE DES POSTULATS GÉOMÉTRIQUES.

§ 21. **Parallèle entre le développement historique et psychogénétique des postulats.** — Il nous faut revenir rapidement aux recherches concernant les principes de la géométrie, qui furent poursuivies dans différentes directions sous l'impulsion de Riemann. En confrontant ces recherches avec les résultats précédemment obtenus, nous reconnaîtrons que *les géomètres sont arrivés à décomposer la géométrie en ses éléments constitutifs qui correspondent aux différents groupes de sensations*. En même temps, nous parviendrons ainsi à une distinction générale des postulats géométriques, qui exige une explication psychologique particulière.

On peut distinguer dans les recherches sur les principes de la géométrie trois voies fondamentales : la voie élémentaire, la voie métrique et la voie projective.

La première part d'une *systématisation logique* du système euclidien et arrive à la fondation de la géométrie non-euclidienne dont nous avons déjà parlé. Dans cette première étape, l'intérêt physique du problème de l'espace prédomine sur les préoccupations

d'ordre logique. En tout cas, cette tendance élémentaire est caractérisée par l'absence d'une analyse propre à *séparer les concepts géométriques*. Tous les concepts fondamentaux (droite, plan, congruence) sont considérés les uns à côté des autres ; on cherche seulement à rendre aussi *simples* que possible les propositions (postulats) qui en expriment les premiers rapports et à préciser leur dépendance mutuelle.

La séparation et la critique plus approfondie des concepts de la géométrie caractérisent, par contre, la série de recherches qui commence avec Riemann, le plus grand philosophe de la géométrie. Ici, grâce à l'influence d'Herbart sur son élève, entre en jeu le *souci des questions d'ordre psychologique ;* de plus, les rapports des concepts géométriques sont étudiés à l'aide des mathématiques supérieures.

Cette voie qui part de Riemann, et à laquelle se rattache immédiatement Helmholtz, est la *voie métrique*, qui édifie toute la géométrie sur le concept de *distance* ou de *longueur d'une ligne* à l'intérieur d'une *variété continue*. Elle se rattache, d'une part, au développement de la *géométrie différentielle* fondée par Gauss ; d'autre part, à la théorie des *groupes de transformations*, comme l'ont mis en évidence, dans la suite, F. Klein, S. Lie et H. Poincaré.

Enfin, la fondation de la géométrie projective et l'exposition, indépendante des notions métriques, qu'en a donnée Staudt, ont conduit Klein à inaugurer une nouvelle voie dans les recherches sur les principes de la géométrie, la *voie projective*, où l'on considère comme fondamentales les notions (*graphiques et optiques*) de la *droite* et du *plan*.

Le lien entre les deux ordres de concepts graphiques et métriques occupèrent, depuis, beaucoup de

savants, tandis que d'autres recherchèrent les rapports intrinsèques de la géométrie métrique à la géométrie projective.

Mais la géométrie projective et la géométrie métrique ont un substrat qualitatif commun dans l'ensemble des rapports, inhérents aux concepts plus généraux de *ligne* et de *surface*, qui caractérisent une *variété continue à plusieurs dimensions*. Ces concepts, sans faire intervenir les idées de droite, plan, congruence, etc., donnent déjà lieu à une branche de la géométrie, appelée *théorie de l'extension ou du continu*, ou *Analysis situs*, qui n'a pas été développée très avant méthodiquement. De là, l'opportunité d'une analyse critique de ces premiers principes de toute géométrie, qui se rattache à quelques vues à peine remarquées de Riemann et à quelques études de Dedekind, Weierstrass, Cantor, etc. Pour notre part, nous avons nettement déterminé les problèmes qui se posent ainsi, et nous les avons, en partie, traités géométriquement dans quelques écrits spéciaux.

Sans nous engager plus loin dans cette brève revue historique, retenons que la critique des principes de la géométrie s'est développée parallèlement avec la différenciation de la géométrie même en deux branches, la *métrique* et la *projective*, qui ont leur racine commune dans la *théorie générale du continu* (ou *Analysis situs*).

Nous pouvons maintenant reconnaître que ces deux branches se rattachent aux deux groupes de sensations tactiles et musculaires, d'une part, visuelles de l'autre. Ajoutons que la sensibilité tactilo-musculaire générale qui, indépendamment de la spécialisation du tact, est aussi le fondement de l'impressionnabilité de la rétine, nous procure déjà la représentation géométrique impliquée dans la théorie du continu, c'est-à-

dire les notions de ligne, de surface, etc.; par contre, comme nous l'avons déjà vu, l'évaluation des distances, et, en conséquence, la genèse d'une idée exacte de la congruence ou égalité géométrique, est due à un organe tactile spécial de référence.

On peut résumer, schématiquement, les résultats obtenus dans l'énoncé suivant :

Les trois groupes de représentations qui se rapportent aux concepts placés à la base de la théorie du continu, de la géométrie métrique et de la géométrie projective peuvent se rattacher, dans la psychogénèse, à trois groupes de sensations : respectivement, aux sensations générales tactilo-musculaires, à celles du tact spécial et à celles de la vue.

Ce résultat nous conduit à une explication psychologique des postulats de la géométrie qui le confirme réciproquement.

§ 22. **Postulats du continu : la ligne.** — Considérons, avant tout, les postulats de la théorie du continu qui se rapportent aux concepts de ligne et de surface.

Le concept de ligne, comme nous l'avons déjà vu, est obtenu par l'association et l'abstraction de ses différentes représentations possibles, génétiques et actuelles. Dans sa représentation génétique, la ligne est une série ponctuelle, ordonnée suivant l'ordre du temps fourni par l'esprit; la série ordonnée en sens inverse s'associe à la première dans la représentation actuelle de la ligne. C'est l'origine du premier postulat fondamental de la *réversibilité de l'ordre linéaire*, qui, selon Herbart et Bain, différencie cet ordre de celui du temps.

Il reste à nous rendre compte de la *continuité* de la ligne qui s'exprime dans deux postulats :

1° Entre deux points d'une ligne, il y a toujours au moins un point intermédiaire;

2° Postulat de Dedekind : si une ligne est divisée en deux parties (classes de points) de telle façon que :

a) chaque point de la ligne appartienne à l'une ou à l'autre de ses parties;

b) chaque point de la première partie précède (dans un sens donné de la ligne) chaque point de la seconde; il existe alors un *point de séparation* qui ne suit aucun point de la première partie et que ne précède aucun point de la seconde.

Arrêtons-nous sur le premier postulat. Il est clair, avant tout, qu'il ne peut exprimer une propriété inhérente à une série ponctuelle empiriquement donnée; au contraire, on a déjà observé que, dans l'espace physiologique, cette propriété de la ligne est contredite par l'expérience. Quand deux points A et B d'une ligne sont distants de moins du double du seuil de la sensibilité, il est impossible d'intercaler entre eux un point, que l'on puisse sensiblement distinguer des deux premiers. Cependant, nous constatons, en général, qu'on peut écarter cette impossibilité, quand on se réfère à une partie plus sensible de l'organe tactile ou à la vue, ou si l'on affine, par n'importe quel procédé, notre pouvoir de perception, ce dont nous pouvons rendre compte, en admettant que l'impossibilité de distinguer un point intermédiaire de deux autres points donnés est due à un *défaut de perception*. C'est ce que nous pouvons d'autant mieux admettre que le seuil des sensations n'a pas une limite absolument fixe et que le mouvement des objets sur la peau peut le reculer, etc.

La généralisation de l'expérience conduit donc à entrevoir la possibilité d'intercaler un point C, entre deux autres A, B sur une ligne donnée, même si cela ne paraît pas immédiatement évident à nos sens. Dans la réalité, il est vrai qu'un tel processus d'intercalation a une limite bien vite atteinte : cela nous montre que, si le concept de la ligne provenait de l'association de toutes les images sensorielles d'une seule ligne physiquement donnée, nous ne serions jamais arrivés à postuler que l'intercalation d'un point entre deux points donnés puisse se poursuivre à l'infini.

Mais supposons maintenant qu'on associe dans une seule classe de représentations toutes les lignes possibles et essayons de déterminer les caractères du concept abstrait qui en résulte.

L'association entre deux lignes l, l' établit idéalement une correspondance biunivoque entre leurs points et l'expérience nous suggère qu'une telle correspondance peut être obtenue en faisant correspondre à deux points distincts A et B de l'une des lignes deux autres points quelconques A′ et B′ de l'autre. Or, pour que l'on puisse associer de la sorte deux lignes l et l', il faut nécessairement admettre qu'entre deux points A et B de l, comme entre les points A′ et B′ pris suffisamment éloignés de l', on puisse toujours intercaler un point. Cette possibilité indéfinie d'intercalation appartient donc à titre de propriété nécessaire au concept de ligne, en tant qu'il représente le produit idéal d'une association et d'une abstraction de toutes les représentations génétiques, empiriquement données, de la ligne.

Mais la continuité de la ligne n'est pas encore entièrement affirmée par là : il s'agit de reconnaître comment on est amené au postulat de Dedekind.

Le processus qui y conduit est plus laborieux, comme le prouve ce fait que les Grecs ne sont pas

parvenus à la pleine notion de la continuité de la ligne, bien qu'ils eussent été obligés de dépasser l'étape précédente, lorsqu'ils considérèrent les problèmes d'intersection des droites et des cercles. Dans cette sorte de problèmes, il faut admettre, en effet, que le segment joignant un point intérieur à un cercle à un point extérieur, coupe ce cercle; il est facile de reconnaître que l'on ajoute ainsi quelque chose au premier postulat, puisque l'ensemble des points d'une droite qui ont des *abscisses* rationnelles, par rapport à une certaine unité de mesure, constituerait un système de points satisfaisant au premier postulat, qui ne serait généralement pas obtenu par l'intersection d'un cercle dans les conditions indiquées.

Le postulat des intersections des droites et des cercles peut être considéré comme un cas particulier du postulat de Dedekind, lorsque l'on partage les points de la droite en « extérieurs » et « intérieurs » par rapport au cercle. Mais les géomètres grecs ne généralisèrent pas ce cas particulier, en examinant toutes les divisions analogues qui peuvent se produire pour une ligne; ou, tout au moins, ils ne firent dans ce sens que quelques tentatives, auxquelles se rattachent certains sophismes fameux que l'antiquité nous a transmis.

L'analyse de la continuité est une acquisition de la science moderne et le postulat de Dedekind l'exprime sous sa forme la plus complète et la plus précise.

Le fait « qu'un point divise une ligne en deux parties » se présente comme une conséquence immédiate de l'ordre linéaire; l'analyse de Dedekind y ajoute l'énoncé des conditions sous lesquelles « la division d'une ligne en parties a lieu au moyen d'un point ». Celles-ci répondent à la représentation d'un point comme *limite* ou *élément de séparation* de la ligne

considérée sous son aspect actuel. Ce qu'exprime le second postulat de la continuité, c'est donc une condition de l'association de deux représentations différentes du « point », comme élément générateur de la ligne prise dans son aspect génétique, et comme limite ou élément de séparation de la même ligne, prise dans son aspect actuel.

L'explication génétique de la continuité constitue un problème si important qu'il vaut la peine de l'éclaircir sous un autre point de vue, en prenant au lieu du postulat de Dedekind celui, logiquement équivalent, de Weierstrass : sur un segment, une série illimitée de points successifs possède toujours *un* point *limite*.

Soient A_1, A_2... A_n..., ces points sur le segment a, définis au moyen d'une construction répétable, et procédons, par exemple, de gauche à droite. Relativement à une image concrète a_n de a, ces points, à partir d'un certain d'entre eux, deviendront indiscernables; par exemple la série des points A_{n+1} A_{n+2}... sera perçue comme un point unique. Mais la valeur de l'indice qui intervient ici peut varier avec le choix de l'image (a_n) du segment a, et peut être considérée, pour un choix convenable de celle-ci, comme aussi grande qu'on le veut.

Or, admettre que sur le segment a, représenté mentalement, il existe un point A, limite des points successifs A_1, A_2... A_n..., équivaut à dire qu'en associant les diverses représentations a_n, on fait correspondre à un seul point la série des segments A_n A, *termes* du groupe A_1 A_2..., dont les extrémités sont indiscernables dans chacune de leurs représentations isolées susdites.

Un tel mode d'association est le procédé constructif le plus simple pour former un concept abstrait de la

ligne, mais il n'est pas l'unique possible. Si l'on abandonne la condition que les deux représentations du point comme « élément générateur » et comme « point limite » s'associent de façon à correspondre à une même notion abstraite, on peut construire, avec Véronèse, un continu d'espèce supérieure non-archimédien, dans lequel existent des segments infinitésimaux actuels et où ne s'applique plus le postulat de Dedekind ou celui équivalent de Weierstrass, mais seulement un postulat de continuité moins restrictif.

Indépendamment de cette construction abstraite de la géométrie non-archimédienne, nous résumerons ainsi les résultats qui concernent la notion intuitive ordinaire de la ligne : *les postulats de la ligne, considérée sous son aspect intrinsèque, expriment la possibilité d'associer dans un même concept abstrait, suivant les lois logiques de la pensée :*

La représentation génétique d'une ligne empiriquement donnée et son inverse, dans l'ordre du temps;

Les différentes représentations génétiques d'une même ligne ou d'une ligne différente;

Les représentations génétiques précédentes aux représentations actuelles, en réunissant, en particulier, dans une seule notion abstraite les deux séries d'images du point conçu comme « élément générateur » et comme « limite » de la ligne.

D'autres propriétés de la ligne se rattachent à la notion de surface et résultent de la confrontation des images actuelles de ces deux notions. Mais elles concernent les relations *extérieures* de la ligne, tandis que le concept de la ligne en soi est complètement défini par le processus constructif décrit.

§ 23. — **Les postulats du continu à deux et à trois dimensions.** — Le concept général de la *surface* comme *variété à deux dimensions* dérive génétiquement, d'après Riemann, du mouvement d'une ligne. Interprété dans sa façon la plus large, ce mode de génération nous conduit à prendre comme donnés sur une surface *deux faisceaux de lignes uniséquentes*, les *génératrices* et les *directrices*, ou trajectoires décrites par les points de la ligne mobile.

Si l'on suppose alors qu'on applique à cette ligne une *détermination métrique*, c'est-à-dire si le concept de la *longueur linéaire* est donné, on réussit à représenter les points de la surface par un *système de coordonnées*, ou encore à établir une correspondance biunivoque continue entre les points de la surface et les éléments (couples de nombres) d'une *variété numérique* à deux dimensions.

Si l'on ne veut pas postuler, dès le début, la détermination métrique des lignes, l'introduction des coordonnées n'est plus possible, en partant des seules données qui figurent dans le mode de génération de Riemann. Aussi, celui-ci doit-il être considéré comme une définition insuffisante de la variété à deux dimensions, et S. Lie y ajoute explicitement l'hypothèse de la représentabilité par une variété numérique.

Afin d'élucider ce point fondamental par une théorie pure du continu, nous avons entrepris des recherches dont voici le résultat : on peut introduire des coordonnées sur une surface, dès que sont donnés sur elle au moins *trois* faisceaux de lignes uniséquentes deux à deux. Pour cela, il suffit d'admettre en substance que la surface peut être *engendrée* de *deux* façons différentes par le mouvement d'une de ses lignes.

Ce théorème ne répond pas seulement au problème qui consiste à *définir* le contenu mathématique à deux dimensions, mais encore au problème psychologique d'expliquer les postulats qui s'y rapportent,

suivant l'intuition ordinaire. En effet, de tels *postulats*, contenus dans l'hypothèse de la représentabilité numérique, *expriment les conditions de la possibilité d'unir dans un seul concept abstrait de la surface les différentes représentations génétiques qui s'y rattachent.*

Aux postulats qui permettent de définir la surface considérée en soi comme une variété à deux dimensions de points, s'ajoutent ceux qui caractérisent les *relations extérieures des lignes sur une surface.* C'est à cet ordre de relations que se rattachent les propriétés de la *division en parties* d'une surface par une *ligne-limite*, et, par conséquent, l'existence et la parité ou l'imparité des intersections de cette ligne-limite avec une autre ligne qui joint deux points de la surface situés de part et d'autre de celle-là, etc.

La représentation de ces propriétés s'obtient d'une façon d'autant plus déterminée que l'on étend davantage le concept de « ligne sur une surface », en associant certaines images de la ligne-limite à celles de la ligne-génératrice d'une surface. Ainsi, par exemple, en partant des différentes façons dont un plan peut être engendré par une de ses droites, on obtient l'image du demi-plan limité par une droite, et l'on a ainsi le postulat de Pasch qui exprime la *propriété suivante de division* :

Si trois points A, B, C d'un plan sont tels que le segment BC ne coupe pas la droite a, et que le segment AB la coupe, le segment AC coupera la droite a; c'est-à-dire que si B, C sont du même côté de a, et A, B du côté opposé : A, C seront aussi du côté opposé.

Or, la difficulté qu'il y a à énoncer les postulats propres à définir *en général* le concept de « ligne sur une surface » consiste à fixer une limite au processus constructif qui, partant de certaines familles de

lignes, s'étend graduellement à des familles plus générales. C'est ce qui laisse problématique la question de savoir si, ou dans quel sens, l'analyse mathématique du problème peut conduire à un résultat de façon ou d'autre définitif. Néanmoins, les observations précédentes nous ont déjà indiqué le mode d'acquisition psychologique des postulats en question. Il s'agit d'associer l'image actuelle d'une ligne, comme limite de séparation d'une surface, aux différentes images relatives aux modes de génération possibles de celle-ci.

Le passage du continu à deux dimensions à celui à trois dimensions ne donne pas lieu à des observations vraiment nouvelles; les postulats qui caractérisent les surfaces génératrices peuvent définir ce continu. Nous nous bornerons donc à remarquer que le *postulat des trois dimensions* exprime une limitation du processus générateur par lequel on passe des points aux lignes et des lignes aux surfaces, etc. Nous avons déjà noté, par ailleurs, que le continu à trois dimensions n'est pas, par lui-même, l'objet d'une représentation actuelle propre. En ce qui concerne les *relations extérieures de la surface*, on a ici également une construction progressive qui remonte de familles particulières de surfaces à des familles plus générales.

§ 24. **Les postulats de la géométrie projective.** — Nous avons montré que les postulats qui sont à la base de la théorie du continu constituent les conditions de l'unification, dans les concepts abstraits de la ligne et de la surface, des différentes représentations génétiques et actuelles qui s'y rattachent. Notre critique a en même temps révélé une certaine indétermination dans ces concepts généraux, due à leur relativité, et qui nécessite une construction progressive,

posant d'avance quelques lignes et quelques surfaces particulières et partant de celles-ci pour étendre peu à peu les concepts déjà définis. Cette nécessité laisse apparaître, en un certain sens, l'importance de cette évolution par laquelle les sensations particulières de la vue et du tact spécial se différencient de la sensibilité générale tactilo-musculaire dans l'ordre d'acquisition de nos représentations spatiales.

Le sens de la vue distingue entre toutes les lignes la droite, et unit dans son concept deux représentations bien distinctes entre elles et entre les autres représentations linéaires. La droite apparaît, en effet, soit comme une ligne ne passant pas par le centre de la vision, dont les projections sont droites, soit comme une ligne (ou rayon visuel) passant par le centre de la vision qui, vue par un œil, donne pour image un point.

L'association de ces deux représentations suppose l'*existence d'une ligne qui soit vue de chacun de ses points comme un point unique*, d'où suit le *postulat de la détermination de la droite :* deux points appartiennent à une ligne droite qui est également déterminée par deux autres quelconques de ses points.

Soient A, B, C trois points d'une droite, vue du point A, et T l'image rétinienne (ou tracée sur le plan de la rétine) de la droite en question. Le point T est, dans ce cas, aussi bien l'image de B que de C. Donc, la droite AB est optiquement définie comme le lieu des points dont les images tombent en T (image de B), et la droite AC est de même définie comme le lieu des points dont l'image tombe en T (image de C). Par suite de cette définition, on a d'après le *principe d'identité :*

$$AB = AC.$$

Mais, par l'intermédiaire de la représentation de la

droite qui ne passe pas par le centre de vision, la droite AC apparaît identique à CA, et, comme ici on peut répéter les considérations précédentes à l'égard d'un autre point D, on a :

$$CA = CD.$$

En définitive, il en résulte l'identité des droites déterminées par les couples de points AB et CD.

Ce postulat, tout en exprimant un fait dont dépend la possibilité d'associer dans un même concept abstrait les représentations des rayons visuels d'une même droite, se traduit par une égalité relativement à ce concept, dès qu'on le considère comme répondant à des objets réels. Ainsi s'explique, précisément, le sentiment de nécessité qui accompagne le postulat en question.

Des considérations analogues sont applicables au *postulat du plan :* « le plan contient la ligne droite qui réunit deux quelconques de ses points ». Si, en effet, on fait naître le plan de la *projection d'une droite par un point extérieur*, le postulat précédent énonce que « le même plan est déterminé également par la projection faite par un des points quelconques d'une droite quelconque, qui joint deux de ses points pris arbitrairement, non en ligne droite avec le centre ». On en déduit que ce postulat exprime la condition nécessaire pour associer, dans un même concept abstrait, les différentes représentations du plan, en particulier celles qui correspondent au fait de l'envisager d'un de ses points quelconques.

C'est pour cela que l'*on doit envisager les postulats de la géométrie projective comme les conditions de l'association de certaines représentations visuelles, d'où naissent les concepts abstraits de la droite et du plan.*

§ 25. **Les postulats de la géométrie métrique.** — Les postulats de la géométrie métrique concernent les *mouvements* et la *congruence* des figures, considérées comme des solides abstraits, pénétrables et superposables.

Les premières propriétés sur lesquelles s'arrête l'attention du géomètre sont celles qui concernent la *possibilité* et le *degré de liberté du mouvement* des solides : un point d'une figure étant fixe, un autre point peut décrire une surface; deux points étant fixes, un autre point décrira en général une ligne; trois points étant fixes, le mouvement n'est plus possible.

Il est assez significatif que, dans certaines analyses incomplètes de ces notions (comme dans celle de Hoüel), les propriétés indiquées figurent seulement au nombre des postulats, et que l'on considère, par contre, comme *axiomes*, les propriétés grâce auxquelles la congruence tombe sous le concept logique de l' « égalité ». C'est qu'en effet les postulats indiqués se présentent directement comme l'énoncé d'*expériences mécaniques;* à leur caractère de certitude ne se rattache pas un sentiment de nécessité comparable à celui qui accompagne les propriétés fondamentales de la congruence, mais seulement l'*évidence* que comporte l'*expérience qualitative*.

Helmholtz semble avoir remarqué le premier qu'on ne peut considérer la congruence géométrique comme une égalité, sans admettre implicitement certains faits essentiels concernant le mouvement, et c'est ce qu'ont éclairci, sous différents points de vue, S. Lie, H. Poincaré, D. Hilbert, en soumettant ces faits à une nouvelle critique. La vue fondamentale qui inspire ces recherches semble avoir été pour la première fois indiquée dans le programme d'Erlangen de F. Klein (1871). Elle consiste en ceci :

Un mouvement établit dans l'espace ou dans une région de l'espace une *correspondance biunivoque ponctuelle* (*transformation*). Pour que la relation de deux figures, transformables l'une dans l'autre par un mouvement (*congruence*), puisse être considérée comme une égalité, il faut :

Qu'en exécutant successivement deux mouvements, on obtienne (comme *produit*) une transformation qui soit encore un mouvement (d'où si A = B, B = C, A = C);

Que la transformation inverse d'un mouvement soit encore un mouvement (d'où de A = B, B = A, suit A = A).

Cela s'exprime brièvement en disant que « les mouvements forment un *groupe de transformations* ». Il est clair que cette affirmation a le caractère d'une affirmation de fait, qui comporte certaines *propriétés d'invariance* des corps solides dans leurs mouvements et de l'organe tactile, indépendamment de la façon dont celui-ci passe d'une position à une autre.

Si donc les postulats de la congruence, objectivement considérés, ont, comme les autres postulats de la géométrie, une valeur empirique, comment s'explique le sentiment de nécessité psychologique qui les accompagne?

Considérons, pour plus de simplicité, deux figures congruentes, constituées par deux couples de points *équidistants* AB et CD; et posons, par exemple, que la distance des points d'un des couples soit de *trois doigts*. En mettant les trois doigts entre A et B et C et D, on aura deux sensations successives qui diffèrent par la *position* donnée à l'organe tactile, mais ont quelque chose de commun inhérent à l'invariabilité de l'organe dans le passage d'une position à l'autre. Les représentations des deux couples AB et

CD ne sont pas identiques, mais peuvent s'associer, par *ce qu'elles ont de commun*, dans une même représentation conceptuelle de *la distance*. Si bien que, quand nous énonçons l'équidistance

$$AB = CD,$$

nous entendons exprimer en même temps une identité et une non-identité : la possibilité de subordonner les deux représentations à une seule par rapport à *certaines relations* et de les distinguer par rapport à *d'autres*.

Qu'implique donc la genèse du concept d'équidistance qui est à la base de la congruence géométrique? Une abstraction et une association qui réunissent, sous un certain point de vue, deux représentations; et *les postulats de la congruence, rapportés à la représentation (conceptuelle) unifiée, prennent ainsi la forme des axiomes logiques de l'égalité*.

§ 26. **L'association de la géométrie métrique et de la géométrie projective : le postulat des parallèles.** — Jusqu'ici nous avons considéré les conditions associatives nécessaires à la formation des concepts géométriques qui se rapportent à un seul groupe de sensations, tactiles ou visuelles. Ils ont pour substrat commun les concepts dérivés de la sensibilité générale; et, dès que les images tactiles et visuelles du point se sont fusionnées, elles ont donné lieu à deux géométries, la tactile et la visuelle, qui se réfèrent au même continu à trois dimensions, c'est-à-dire au même espace.

Les développements mathématiques qui ont trait à ces deux géométries nous montrent jusqu'à quel point elles peuvent se développer; nous pouvons donc dire

qu'avec le tact (général et spécial) nous construisons une géométrie *métrique*, et avec la vue une géométrie *projective*, se rapportant à la même variété de points (l'espace). Ces deux géométries ne s'associent pas en notre esprit dans un seul ordre de rapports spatiaux, et chacun des sens (notamment la vue) nous donne, par association, la perception médiate de ces rapports.

Une telle association des deux géométries implique, à son tour, de nouveaux postulats. On pourrait, en effet, construire, dans une variété à trois dimensions, deux géométries abstraites conventionnelles, en plaçant à la base de l'une un système linéaire de ∞^3 surfaces dénommées « plans », à la base de l'autre un groupe de ∞^6 transformations dénommées « mouvements », douées de certaines propriétés; et ces géométries, formellement identiques à la géométrie métrique ordinaire et à la géométrie projective, n'auraient entre elles *a priori* aucune relation.

La géométrie ordinaire, par contre, unifie dans un même concept de la ligne droite les images visuelles et tactiles de celle-ci et reconnaît ainsi une même *symétrie physique* des phénomènes optiques et mécaniques.

Cette unification est si solide qu'il faut une critique très serrée pour séparer les deux ordres de concepts associés.

A première vue, on n'aperçoit pas de différences entre la propriété optique fondamentale de la droite d'être déterminée par deux points et sa propriété mécanique d'être la ligne de moindre distance ou l'axe de rotation d'un corps solide.

La raison profonde en est que l'union des propriétés indiquées est impliquée par le jugement qu' « une ligne congruente à une droite est une

droite ». Si, dans cette phrase, on remplace le mot « congruent » par celui d' « égal », il faut un grand effort de critique pour nous rendre compte que le jugement énoncé ne se réduit pas à une tautologie. Et pourtant, si nous supposons que la lumière ne se propage pas suivant la ligne métriquement la plus courte, c'est-à-dire suivant la droite définie au sens mécanique, une trajectoire lumineuse qu'on ferait tourner autour de deux de ses points donnerait une ligne congruente à la première qu'on ne pourrait plus considérer comme une droite au sens optique de ce mot.

La congruence de la ligne droite traduit donc le fait physique fondamental inhérent à la propagation de la lumière dans les milieux homogènes; ce fait rend possible l'association des deux géométries (tactile et visuelle) dans une même géométrie métrico-projective, de sorte que, dans ce système géométrique plus général, la congruence revêt encore l'aspect logique d'une égalité. Il est à remarquer, en effet, que par un processus d'abstraction semblable à celui que nous avons analysé au sujet du mouvement, on arrive également à la notion d'une *égalité projective* ou optique, notion que les géomètres considèrent sous le nom de *projectivité*.

Or, l'égalité métrique (congruence) apparaît, pour le sens de la vue, comme un cas particulier de la projectivité. Elle désigne l'identité des relations spatiales de deux figures considérées *intrinsèquement*. Ainsi le postulat métrico-projectif de la congruence des droites se dissimule sous la forme d'un axiome de l'égalité logique.

Quelques-uns ont cru même pouvoir partir de là pour arriver à définir la congruence comme l'identité des propriétés intrinsèques de deux figures. Mais,

même abstraction faite de son caractère vague, cette définition est insuffisante. En effet, sans la comparaison avec quelque chose d'extérieur, on ne distingue pas la congruence de la similitude.

En tant que l'espace métrique dérivé des représentations tactiles et que l'espace projectif construit par la vue se confondent dans le concept abstrait d'un même espace métrico-projectif, la représentation qu'on se forme de celui-ci est celle d'un espace infini; l'infinité de la droite dans les rapports optiques et mécaniques et son aspect optique de ligne « ouverte » excluent, en effet, la représentation de Riemann.

Il reste encore à expliquer comment on parvient au postulat d'Euclide, en excluant celui de Lobatschewsky. Il est naturel de comparer, dans ce but, les deux représentations tactile et visuelle que nous nous formons des *droites parallèles*. Celles-ci se présentent, optiquement, comme des droites d'un plan qui ne se coupent pas, et, précisément, comme limites de droites qui se coupent en un point éloigné. Dans la représentation tactile, elles se présentent, par contre, comme des *lignes équidistantes*. Il résulte de l'association de ces deux représentations que *deux parallèles* sont conçues *comme des droites équidistantes* (d'un plan). Et l'hypothèse de droites semblables implique notoirement le postulat d'Euclide sur les parallèles. En d'autres termes, elle conduit à reconnaître comme unique la droite dont les rayons sont optiquement parallèles à une autre droite donnée, suivant ses rayons opposés. Ainsi, *le postulat des parallèles résulte de l'association tactilo-visuelle qui nous conduit au concept métrico-projectif de l'espace.*

Ce concept, pour autant qu'on puisse discuter autour de sa valeur réelle exacte, reste toujours, dans

sa formation subjective, euclidien. Mais la critique qui en a dissocié successivement les éléments constitutifs en est venue, précisément, à décomposer tout d'abord les associations les plus complexes et les plus récentes, unifiant les données des différents sens, pour remonter ensuite, toujours plus en arrière, jusqu'aux origines de ce processus de formation.

Une confirmation de l'explication génétique du postulat d'Euclide nous est fournie par l'histoire. G. Vailati nous a fait remarquer que Saccheri attribue le peu de progrès accomplis avant lui par la critique non-euclidienne à la quiétude de beaucoup de géomètres vis-à-vis de la définition des parallèles comme droites équidistantes. C'est, pour Saccheri, une *erreur de définition complexe;* et c'est précisément la dénonciation de cette erreur logique que l'ingénieux savant donne comme point de départ de sa critique originale.

Mais une définition complexe est-elle autre chose qu'un mode implicite de postuler l'existence d'une entité, dont le concept dérive de plusieurs représentations conceptuelles associées?

A ce titre, on peut dire, d'une façon plus générale, que la prétendue nécessité logique des postulats géométriques repose toujours, en un certain sens, sur une définition complexe dans laquelle les représentations associées, prises isolément, peuvent ne pas entrer dans la sphère conceptuelle.

§ 27. **Conclusion.** — D'un point de vue synthétique, les considérations précédentes sur l'acquisition des concepts géométriques mettent en lumière la variété des expériences élémentaires et inconsciemment répétées, qui sont évoquées de nouveau dans la vision imaginative ou intuitive de l'espace. Mais, mieux encore,

elles nous montrent le long processus d'abstraction et d'association par lequel les concepts eux-mêmes furent engendrés.

L'*évidence de la géométrie* réside, d'une part, dans la facilité de réévoquer ces anciennes expériences inconscientes, en les répétant, pour ainsi dire simplifiées, dans l'intuition des images; d'autre part, dans la possibilité de rencontrer, sous *forme* de postulats, les opérations d'association et d'abstraction exécutées sur les éléments constructifs de l'espace.

Les faits supposés par les postulats se présentent donc comme les conditions d'un développement psychologique, ayant lieu selon les lois de la logique jointes au principe d'économie, et qui conduit précisément à une représentation plus unifiée de la réalité géométrique.

LIVRE II

LA MÉCANIQUE

CHAPITRE I

LE TEMPS ET SA MESURE

§ 1er. **La mécanique comme extension de la géométrie.** — Faisons abstraction des doutes élevés sur la validité rigoureuse des postulats de la géométrie : celle-ci se présente alors comme une science purement déductive, la science type des philosophes rationalistes. Mais ce caractère de perfection logique ne lui appartient qu'à titre de construction théorique, c'est-à-dire à titre de règle statistique. (Liv. II, § 6.) Considère-t-on, au contraire, les résultats de la géométrie, dans leur contenu réel, relativement aux cas concrets, c'est-à-dire considère-t-on les rapports géométriques comme une partie des rapports physiques, les développements déductifs qu'ils autorisent sont incapables de nous conduire à des prévisions qui dépassent un degré d'approximation limité.

L'abstraction qui sépare la géométrie de la physique n'est utile qu'autant qu'on peut considérer ces

cas, dans leur ensemble, comme donnés dans des conditions *indifférentes*. Au contraire, s'il est possible de classer leurs *différences*, de façon à apprécier l'influence systématique qu'elles exercent sur la prévision, on sera conduit à *poursuivre la géométrie en complétant ses concepts par l'adjonction de nouvelles données sensibles*, susceptibles de rendre plus déterminée son application scientifique.

Une première extension de la géométrie dans ce sens est constituée par la mécanique, qui arrive à opérer un choix entre les différents rapports de position des corps, considérés comme géométriquement possibles, en tenant compte du temps, de la force, de la masse, etc. Ces nouvelles notions ne sont pas simplement juxtaposées aux données spatiales, elles leur sont *subordonnées*, parce que la mécanique suit comme acquisition psychologique la géométrie. Mais nous avons déjà remarqué qu'une telle hiérarchie des concepts, qui se reflète dans l'ordre d'exposition dogmatique de la science, n'a pas une valeur de *subordination nécessaire*. Il est permis de changer cet ordre et de construire une mécanique indépendante de n'importe quelle hypothèse géométrique, qui sera traduite, dans ce cas, par une hypothèse mécanique équivalente. La mécanique pourra conduire, dès lors, à une vérification plus étendue ou à une correction des principes mêmes de la géométrie.

Prenons-en pour exemple le postulat V d'Euclide sur les parallèles, qui est à la base de la statique ordinaire. Une critique approfondie nous apprend ce que serait une statique non-euclidienne : deux forces égales, perpendiculaires à une tige rigide A B, en ses extrémités, donneraient pour résultante une perpendiculaire au point médian O de A B, comme dans le cas euclidien ; mais, contrairement à ce cas, la

résultante ne serait plus égale à la somme des deux composantes. Voilà une traduction statique du postulat géométrique des parallèles, une supposition nouvelle qu'il contient, et dont la vérification, dans l'ordre de la rigueur expérimentale, constitue une nouvelle preuve de la géométrie euclidienne. Cette vérification, eût-elle révélé un écart appréciable avec le résultat prévu, aurait pu conduire à une correction des principes mêmes de cette géométrie.

Le développement de la mécanique n'a pas donné lieu à des corrections de ce genre, et l'on peut dire que *la mécanique constitue une vérification plus étendue de la géométrie d'Euclide*. Si certains phénomènes ont paru difficilement conciliables avec les lois de la mécanique, on n'a jamais envisagé la possibilité d'en rendre compte en changeant les prémisses de la géométrie, ce qui s'accorde avec l'ordre d'exactitude de ses vérifications plus directes.

§ 2. **Programme.** — Si l'on considère la mécanique comme une extension de la géométrie, il semble assez naturel d'aborder le sujet de la manière suivante :

1° Une analyse du concept du *temps*, symétrique à celui de l'espace, et que l'on trouve déjà formé avant tout développement scientifique de la connaissance : l'adjonction du temps à l'espace conduit aux notions qui constituent la *cinématique* ou géométrie étendue du mouvement. Mais une discussion approfondie du *mouvement* mettant en rapport les notions cinématiques avec celles de la dynamique, nous renverrons cette discussion à la troisième partie de ce livre;

2° Une critique des concepts et des principes de la *Statique*;

3° Une critique des concepts et des principes de la *Dynamique*.

La séparation entre la statique et la dynamique est conforme à la tradition historique et exigée par notre façon d'envisager les forces. Afin de rapprocher ces deux disciplines et d'adopter, dans la dynamique, la simplification classique en usage, nous nous sommes limité, en principe, à la *mécanique du point*, bien que, dans la statique, il eût peut-être été avantageux de considérer de suite les *systèmes*. Les questions relatives à ceux-ci se trouveront discutées dans la quatrième partie de ce livre, tant pour la statique que pour la dynamique.

§ 3. **Le temps : succession et durée.** — Quand deux sensations, ou deux groupes de sensations, sont données, nous apercevons que l'une est *antérieure* et l'autre *postérieure* ou toutes les deux *simultanées*. L'intuition que nous exprimons par les termes d' « antérieur » et de « postérieur » ou d' « avant » et d'« après », offre un critère pour ordonner des phénomènes en série (*succession temporelle*).

Quand deux phénomènes A, B et deux autres C, D sont donnés, nous avons coutume de dire que *les intervalles de temps*, compris entre A B et C D, sont *égaux* ou que l'un est plus *grand* que l'autre. Ce jugement nous conduit à une appréciation quantitative, c'est-à-dire à une *mesure* du temps ou de la durée.

La mesure des durées implique le critère de la succession temporelle ; au contraire, *les notions d' « avant » et d' « après » ne nous fournissent aucun critère pour comparer deux intervalles de temps* qui n'ont pas un commencement ou une fin commune.

§ 4. **Le temps psychologique et le temps physique.** — Les jugements de succession ou de durée peuvent

se rapporter à différentes *séries phénoménales*, de même que les jugements de longueur peuvent s'établir au sujet de différentes séries de corps que l'on compare en tant que lignes. Chaque série phénoménale nous offre, en ce sens, une *échelle temporelle* où sont donnés au moins l'avant et l'après, et qui peut fournir un critère de comparaison des durées.

Le concept abstrait du temps résulte par association et abstraction de toutes les échelles temporelles possibles. Ce temps abstrait, que nous considérons comme *temps physique*, suppose donc une échelle temporelle unique, où *tous les phénomènes possibles* trouvent place, à la différence du *temps physiologique*, qui est l'échelle des *phénomènes perçus*. Le temps physique implique donc, en particulier, la possibilité :

1° D'associer les représentations temporelles relatives à différents observateurs ;

2° D'associer les représentations temporelles relatives à des lieux différents.

L'accord des représentations associées et la vérification des prévisions qu'elles autorisent mettent en lumière le *caractère réel du temps*.

Si nous avons trois phénomènes A, B, C et trois observateurs, dont le premier observe A et B, le second B et C, et le dernier A et C ; si le premier observateur trouve que B succède à A, le second que C succède à B, on peut prévoir, et l'on vérifie pour le troisième que C succède à A. C'est ce que signifie l'accord des représentations temporelles de différents observateurs, et l'on voit clairement comment cet accord implique la possibilité d'associer les échelles temporelles qui se rapportent à chacun d'eux dans une échelle unique relative à un seul observateur hypothétique.

L'association des représentations temporelles, relatives à des lieux différents, rencontre une difficulté en ce que telles sensations qu'on associe comme inhérentes à un phénomène localisé, parce qu'elles se présentent simultanément à un observateur placé au lieu du phénomène, se présentent comme successives pour un observateur qui se trouve à un endroit différent ; ainsi, par exemple, la lumière et le son causés par la décharge d'un fusil. Pour rendre possible l'association, il faut admettre que les phases partielles du phénomène, successives dans l'espace, le sont aussi dans le temps (*temps de propagation*). Cette hypothèse est confirmée par l'expérience relative aux phénomènes qui se réfléchissent sur leur lieu d'origine.

Par suite, pour associer les représentations temporelles relatives à des lieux différents, il faut :

1° Ou trouver un phénomène qui se propage instantanément ;

2° Ou corriger l'évaluation empirique de la simultanéité des phénomènes produits en des lieux différents par la mesure du temps de propagation.

Abstraction faite de cette mesure dont nous parlerons bientôt, la propagation presque instantanée de la lumière ou de l'électricité sert dans la pratique à établir l'association voulue.

Le concept de la simultanéité, ainsi établi, n'est pas rigoureux et contient une erreur appréciable. Il est, en effet, connu que Römer, grâce à des considérations astronomiques, et Foucault, par une expérience directe sur la terre, ont mesuré la vitesse de la lumière, — environ 300.000 kilomètres à la seconde, — qui est aussi celle des ondes électriques.

En faisant donc abstraction du critère de la mesure, la succession temporelle est ainsi rendue indépendante de l'espace, au degré d'approximation qui correspond à la vitesse de la lumière ; à ce degré

d'approximation, très élevé par rapport à la pratique ordinaire, on peut facilement vérifier sur la terre les prévisions concrètes auxquelles conduit l'hypothèse de cette indépendance.

§ 5. **Propriétés de la succession temporelle.** — *Les propriétés de l'ordre que nous considérons comme temps physique nous sont imposées par les conditions associatives des différentes échelles temporelles possibles.* Si nous ne prenions qu'une seule échelle, constituée par une série de phénomènes périodiques, la représentation du temps qu'elle nous donnerait serait celle d'un *ordre fermé*. Mais la diversité de nos sensations, dans leur ensemble, nous force à considérer le temps comme un *ordre ouvert*, qui s'étend indéfiniment dans les deux sens, par suite de la supposition de phénomènes possibles suivant ou précédant ceux des séries données. Les séries des phénomènes périodiques se laissent associer par simultanéité aux séries non périodiques, en attribuant à chacun de leurs phénomènes une série de places sans cesse répétées.

La *continuité de l'ordre temporel* est une hypothèse propre au concept du temps physique, à laquelle nous sommes conduits lorsque nous voulons associer dans une échelle temporaire abstraite toutes les échelles temporaires possibles, et, particulièrement, celles qui se rapportent à la représentation génétique des différentes séries linéaires de points tactiles ou visuels. *Le temps psychologique n'est pas continu*, parce que les *instants* qui le composent sont formés de phénomènes perçus l'un après l'autre, et qui se représentent par une *série numérique discrète*.

§ 6. **La durée.** — La notion d'un ordre suivant lequel les phénomènes se succèdent n'épuise pas le contenu

de notre connaissance du temps. Il s'y ajoute, en général, une détermination métrique de la durée, qui est avant tout relative à la série des phénomènes prise comme échelle temporelle.

Un critère de la mesure du temps nous est ordinairement fourni par chaque série de phénomènes acoustiques ou visuels, qui se succèdent à des intervalles distincts, mais suffisamment fréquents pour remplir tout le champ psychologique de l'attention; nous obtenons l'appréciation quantitative de la durée en *comptant* les pauses.

Dans une série visuelle continue, par exemple dans la série d'impressions qui correspondent au tracé d'une ligne décrite par un point mobile, on peut établir une mesure des durées, en associant les intervalles de temps aux arcs décrits par le point mobile, qui se mesurent suivant leur longueur.

Ces critères, se rapportant à l'une ou l'autre série phénoménale prise comme échelle temporelle, offrent une *mesure* du temps purement *relative*, les mesures fournies par des séries acoustiques ou visuelles différentes n'étant pas comparables entre elles. La mesure qui se rapporte, par convention, à une série particulière, sert seulement à établir un mode plus précis de prévisions de l' « avant » et de l' « après » dans la série choisie comme échelle de référence.

Au moyen d'une mesure conventionnelle du temps, nous pouvons faire correspondre les instants successifs aux valeurs d'une variable t, exprimant l'intervalle du temps écoulé depuis une certaine origine. Si, à la place de t, on prend une *fonction croissante arbitraire*,

$$T = f(t),$$

on a une nouvelle mesure conventionnelle du temps, qui peut avoir une signification concrète par rapport

à une autre échelle temporelle choisie convenablement.

A ce concept de la mesure du temps relative aux diverses séries de phénomènes successifs, s'oppose la croyance, acceptée par Newton sous l'influence de la philosophie médiévale, en un temps *absolu*, indépendant des phénomènes, qui fournirait un *critère* de comparaison *vraie ou mathématique des durées*.

Cette opinion est justement combattue par Mach, pour des raisons historiques, psychologiques et linguistiques. Il nous suffira d'y reconnaître la même conception transcendante du processus d'abstraction que nous avons déjà plusieurs fois critiquée. Mais, si l'on doit tenir le temps absolu pour vide de sens, faut-il en conclure que la mesure du temps est purement relative? A cette conclusion semblent s'arrêter le plus grand nombre des géomètres : P. Volkmann, par exemple, et Mach, celui-ci, bien que moins explicitement, lorsqu'il compare la mesure du temps à celle des températures.

Pour écarter l'arbitraire de la substitution

$$T = f(t)$$

qui figure dans la mesure du temps, on recourt au choix conventionnel d'une échelle de référence, en considérant les intervalles de temps comme proportionnels aux espaces parcourus par un mobile sur lequel n'agit aucune force. On prend ainsi le *principe d'inertie*, non plus comme exprimant un rapport entre le temps, le mouvement et la force, mais comme *définition du temps*. Celle-ci, qu'on y fasse attention, ne peut aucunement se réduire à une simple *convention*, parce qu'elle implique une *supposition de fait*, à savoir : « Si deux mobiles, soustraits à toute force, parcourent deux espaces a et b en des temps égaux, ils parcourront dans la suite, en des temps égaux, des espaces proportionnels à a et à b ».

C'est là, d'ailleurs, une conception encore trop étroite des faits impliqués dans la mesure ordinaire du temps. Il suffit, pour cela, de noter que cette mesure est antérieure au principe d'inertie. Le sens commun admet l'existence d'une *mesure naturelle* du temps, à laquelle il attribue confusément une valeur physique propre. Quelle valeur faut-il accorder à cette créance, une fois éliminée toute idée transcendante d'un temps indépendant des phénomènes? Comparons, à cet effet, la mesure du temps à celle des températures et des longueurs.

Le temps, comme la température, comme l'arc d'une ligne, et, en particulier, comme le segment d'une droite, peut être représenté par une variable numérique t croissant dans un sens donné. Toute fonction croissante $f(t)$, prise à la place de t, représente également, dans les trois cas, la *succession ordonnée* des temps, des températures ou des longueurs linéaires ; et l'on peut construire une *horloge*, un *thermomètre* et un *mètre conventionnels* répondant à un choix arbitraire de la fonction $f(t)$.

Pour l'horloge, il suffit d'un instrument basé sur le mouvement convenablement gradué d'une aiguille sur un cadran, qui indique comme *égaux* des *intervalles de temps* pour lesquels la fonction $f(t)$ subit des *accroissements égaux*. Pour le thermomètre, il suffit que la dilatation linéraire de la substance thermométrique soit appréciée sur une échelle où l'on marque comme *égaux* des *accroissements de température* qui correspondent à des *accroissements égaux* de la fonction $f(t)$; ces accroissements de température, considérés conventionnellement comme égaux, se trouveront, du reste, dans différents rapports avec les

dilatations linéaires de la substance thermométrique, suivant la nature de la substance employée. Quant au mètre, on pourra en construire un conventionnel, sous la condition indiquée, en se servant d'un *fil élastique gradué*, diversement tendu en ses diverses parties, de manière qu'un segment quelconque du fil soit toujours tendu de la même façon, quand, après un mouvement quelconque, il reprendra sa position initiale.

Les différents thermomètres conventionnels représentent également bien notre sensation de changement de température ; en effet, la sensation que nous ressentons au passage de 0° à 1° d'un thermomètre ordinaire à mercure, n'est en rien comparable à celle que nous éprouvons au passage de 20° à 21° ; si bien que, si un thermomètre nous indique ce dernier accroissement comme le double du précédent, nous n'avons, dans notre perception sensible, aucun critère pour préférer l'une de ces deux indications.

Il n'en est plus ainsi des différents mètres conventionnels que nous pouvons construire. Un seul parmi eux, celui constitué par un *fil solide inextensible*, s'accorde avec les *sensations de longueur linéaire* fournies par notre organe tactile. Nous considérons ce mètre, en conséquence, comme l'*étalon naturel des longueurs*, et nous reconnaissons que la possibilité de ce mode de mesure comporte la supposition d'un fait général : l'*invariabilité des corps solides* par rapport à notre organe tactile et les uns par rapport aux autres dans *le mouvement*.

Que dire maintenant de l'horloge ? Existe-t-il une horloge dont les indications répondent à une sensation de durée relative à certaines séries de phénomènes, nettement distincts, que nous avons en vue quand nous parlons d'une *mesure naturelle du temps* ?

Et existe-t-il quelque fait général qui s'exprime par l'accord réciproque des indications fournies par ces échelles temporelles ? En un mot, en dehors de la sensation inhérente au fait de compter les pauses d'une série quelconque de phénomènes distincts, avons-nous une sensation spécifique de la durée, relative à une série de phénomènes *isochrones*, qui soit comparable à la sensation tactile des longueurs, ou n'en avons-nous pas, comme il arrive pour les changements de température ?

A cela, nous répondrons que nous avons la *sensation du rythme* de certaines séries acoustiques que nous appelons *isochrones;* les différentes séries de sons, que nous percevons comme isochrones, nous fournissent des mesures de temps comparables entre elles, et nous amènent ainsi, bien qu'avec une exactitude restreinte, à une même appréciation des durées égales, et, par conséquent, à une même *mesure naturelle du temps*.

C'est un fait incontestable, du moins pour les oreilles exercées, que l'ouïe nous offre une appréciation très précise de l'isochronisme ; et l'on s'accorde sur l'existence d'une sensation du rythme musical. Qu'il s'agisse là d'une sensation ordinaire de l'ouïe, plutôt que d'une association de ce sens avec certains mouvements musculaires, qui, par suite de répétitions successives, tendent à s'effectuer régulièrement, c'est ce qu'il est permis d'ailleurs de discuter : les musiciens ont recours à un procédé analogue lorsqu'il s'agit de *battre la mesure ;* et l'isochronisme des mouvements lentement répétés de la main et du pied est peut-être en connexion avec le rythme de certaines fonctions organiques, notamment du pouls. On pourrait ainsi dire que l'oreille nous offre la notion de l'isochronisme, et, par conséquent, des durées, par

association avec le sens musculaire, de même que l'œil nous fournit la notion des longueurs par association avec les données tactiles.

Quelle que soit, du reste, l'opinion que l'on professe à ce sujet, il n'en reste pas moins vrai qu'au moyen d'une série de mouvements réguliers, accompagnés de sensations acoustiques, on peut établir une mesure du temps sur laquelle les hommes s'accordent, dans des limites restreintes mais suffisamment précises, comme devant l'objet d'une sensation spécifique de la durée ; et, comme aux sensations de durée répondent continuellement des prévisions confirmables, nous pouvons parler de la *durée* comme d'une *réalité objective*. On devra donc considérer toute horloge dont les indications sont d'accord avec cette sensation de la durée, comme un *instrument de mesure du temps physique*, à la différence de toute autre horloge conventionnelle; et, grâce à cette horloge, nous pourrons *étendre la mesure naturelle* du temps au delà des limites restreintes que nous imposait l'usage d'une série musicale isochrone.

L'accord entre les sensations de durée nous garantit déjà d'un *certain* accord entre les horloges graduées naturellement; mais s'il se trouve un procédé d'accord *plus précis*, il constituera un fait général que nous nous proposons maintenant de reconnaitre.

§ 7. **Le postulat de la mesure du temps.** — En poursuivant la comparaison des durées au delà des limites de la sensation primitive d'isochronisme, nous suivons un processus qu'on a coutume de parcourir dans les cas analogues. Nous supposons que l'*égalité des durées* exprime un *caractère réel* des phénomènes, dans des limites plus précises que celles fixées par la sensation immédiate ; et nous sommes conduits à

supposer que cette égalité doit se retrouver dans tous les phénomènes qui dépendent de certaines *conditions constantes*, bien déterminées, envisagées par nous comme *causes identiques*. Bien qu'une semblable hypothèse soit dénuée de sens rigoureux, elle conduit à nous demander :

1° Si les phénomènes qui ont lieu dans certaines *conditions semblables*, pratiquement constantes, et que nous considérons comme des effets de *causes sensiblement identiques*, ont des durées égales par rapport à notre sensation d'isochronisme ;

2° Si de tels phénomènes, confrontés au delà des limites de notre sensation immédiate d'isochronisme, conduisent à une même appréciation de l'égalité des durées ;

3° Si l'on ne pourrait pas rendre toujours plus petit le désaccord éventuel qui pourrait surgir dans la vérification de cette dernière hypothèse, en éliminant progressivement, dans la mesure du possible, quelques dissymétries inhérentes aux phénomènes considérés comme identiques.

Les hypothèses qui répondent à ces trois questions constituent le *postulat fondamental de la mesure du temps*, auquel nous faisons directement ou indirectement appel dans la construction et la correction des horloges. L'*accord des horloges* ainsi construites, dans les limites où il est possible de l'obtenir, constitue la vérification du postulat en question. Cette vérification peut être considérée comme *rigoureuse* tant qu'on ne rencontre pas d'*erreurs systématiques*, mais simplement des *erreurs accidentelles* qui tendent à s'éliminer dans les moyennes.

Cherchons à évaluer l'étendue de validité du postulat introduit. A cette fin, faisons les remarques suivantes :

1° Sur la terre on obtient déjà un premier accord sensible entre les diverses horloges à sable ou à eau, et, en général, entre toutes celles qui reposent sur la constance du poids. On arrive à un accord plus précis dès que, à l'aide des instruments de mesure précédents, on a reconnu l'isochronisme des petites oscillations du pendule, qui devient le principe de la construction des horloges à pendule;

2° Les observations astronomiques nous conduisent à admettre l'égalité de certains intervalles de temps, dans lesquels s'accomplissent des mouvements de révolution quasi périodiques, comme, par exemple, la constance du jour sidéral, du mois, de l'année, etc.

Les différents critères de mesure ainsi obtenus s'accordent très précisément avec la mesure des horloges terrestres, et plus précisément encore entre eux. En outre, on peut rendre la concordance obtenue encore plus précise, par les corrections auxquelles conduit l'application du postulat fondamental de la mesure du temps.

Il est vraiment caractéristique que le degré d'exactitude des vérifications ainsi obtenues atteigne une limite pratiquement rigoureuse; et il n'y a pas lieu de s'étonner des petites différences qui peuvent surgir dans les mesures fournies par les horloges, lorsque l'on songe à toutes les causes de variation des circonstances considérées comme identiques : la variation de la température qui influe sur la chute de l'eau et du sable à travers une petite ouverture ou sur la longueur du pendule, dont on n'arrive jamais à bien compenser les effets; les modifications de la pesanteur en différents lieux de la terre; la lente modification du système planétaire en dehors de ses changements périodiques; la variation même de l'univers astronomique que nous considérons comme une condition constante.

Les faits postulés par la mesure du temps mis ainsi en lumière, nous croyons opportun d'observer qu'on n'est nullement fondé à les considérer comme des *vérités nécessaires*. Deux clepsydres se sont vidées une première fois d'une façon simultanée; comment conclure *a priori* que, dans une expérience ultérieure, l'une ne se videra pas plus vite que l'autre? Contre la possibilité de cette alternative, on invoquerait en vain le sentiment d'*évidence* qui accompagne le postulat de la mesure du temps. En effet, cette évidence ne réside qu'en ce que *le postulat exprime la condition nécessaire pour que la durée puisse être associée à d'autres données sensibles dans le concept d'un phénomène;* mais la vérification de cette condition constitue précisément le fait en question : *la réalité objective de la durée.*

§ 8. **L'indépendance du temps vis-à-vis du lieu.** — Admettons le postulat analysé dans le précédent paragraphe. La mesure du temps est établie *pour un lieu donné*, de façon que la variable « temps » est déterminée à chaque instant, à une substitution linéaire près :

$$\tau = at + b.$$

Les constantes a et b dépendent de deux choix conventionnels : le choix de l'unité de mesure et celui de l'instant initial.

Pour comparer deux durées en des *lieux différents*, A et B, nous avons deux critères :

1° Le *transport* dans l'espace d'un phénomène donné, conformément au postulat de la mesure du temps; par exemple le transport de la clepsydre ou

de l'horloge à pendule, en tenant compte des circonstances correctrices, comme la variation de la pesanteur;

2° Le *signal* en B du commencement ou de la fin d'un événement qui se produit en A, au moyen de la lumière, ou de l'électricité, etc. Dans ce jugement de simultanéité de deux phénomènes, le temps de propagation s'élimine, vu qu'on peut le considérer comme constant, conformément au postulat du paragraphe précédent, à condition que la distance de A et B ne varie pas.

De leur accord sur l'égalité de deux durées en des lieux différents, on peut conclure que ces deux critères de comparaison sont implicitement contenus dans le postulat de la mesure du temps, joint à la supposition géométrique fondamentale de la symétrie des phénomènes (homogénéité de l'espace), mais seulement sous la condition du *repos relatif* de A et de B, et une fois vérifié que l'intensité des phénomènes n'influe pas sur la vitesse de la propagation.

Imaginons qu'on envoie un signal de A en B et de B en A; les deux temps de propagation, en toute égalité de conditions, doivent être considérés comme égaux par raison de symétrie. Nous pouvons directement mesurer le temps de propagation pour aller de A en B, chaque fois que le signal peut se réfléchir B en A; il suffit de diviser par 2 l'intervalle écoulé depuis le départ jusqu'au retour de l'onde lumineuse. C'est sur ce principe que repose la mesure de vitesse de la lumière dans les expériences de Foucault.

Il est clair que nous arrivons ainsi à déterminer, d'une façon théorique aussi précise que l'on veut, la simultanéité de deux événements en des endroits différents, sous la condition expresse du repos relatif.

Bien entendu, l'accord expérimental des différents jugements que l'on peut ainsi obtenir constitue un fait; mais la supposition de cet accord doit être considérée comme contenue dans le postulat de la mesure du temps.

En vertu de ce postulat fondamental on peut donc :

1° Juger de l'égalité de deux durées en des lieux différents A et B;

2° Juger de la simultanéité de deux phénomènes en des lieux différents, pourvu que A et B soient en repos relatif.

Il suffit pour *transporter la mesure du temps établie dans un lieu A, en tout autre lieu en repos relatif par rapport à A*. C'est en cela que consiste l'indépendance du temps vis-à-vis du lieu. Mais il s'agit d'une indépendance relative. Si B varie par rapport à A, si la distance AB augmente ou diminue, par exemple d'une façon uniforme, le critère fourni par un signal optique ou électrique ne permet plus de fixer la simultanéité des instants initiaux. Si l'on adopte simplement ce critère, comme si A et B étaient fixes, on trouvera dans la détermination du temps une *constante additive locale*, dont on sera seulement averti au cas d'un recours possible à l'autre critère, c'est-à-dire à l'envoi d'une horloge de A en B.

Dans les mêmes circonstances, le critère du signal ne pourrait pas établir l'égalité de deux durées relatives à deux événements qui se dérouleraient respectivement en A et en B; le temps serait encore affecté d'une *constante locale multiplicative*, c'est-à-dire que, en considérant A comme fixe, et en désignant par t une mesure du temps définie par rapport à ce lieu, *la mesure du temps obtenue par l'arrivée du signal en B serait*

$$\tau = at + b,$$

où *a* et *b sont deux constantes dépendant de la vitesse de B.*

En analysant plus profondément la question, on trouverait que des hypothèses concernant *la cinématique de la lumière* jouent ici un rôle fondamental, et on serait amené à établir *le caractère local relatif de la construction du temps* (Cf. § 29).

CHAPITRE II

LES CONCEPTS ET LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA STATIQUE

§ 9. **Le développement historique et l'évidence des principes.** — Dans son ouvrage classique sur l'histoire de la mécanique, E. Mach étudie le développement historique des concepts et des principes de cette science, en rappelant et en discutant les problèmes et les expériences qui donnèrent lieu à leur origine et à la forme qu'ils ont reçue.

Cet exposé, auquel nous nous référerons souvent dans la suite, montre qu'il est jusqu'à un certain point possible de séparer l'ensemble des expériences et des raisonnements dont est sortie la *Statique*, de celui qui donna naissance à la *Dynamique*. La première date des géomètres grecs, en particulier d'Archimède; elle se développa dans le temps moderne, grâce à Stévin, Varignon, Galilée, etc., jusqu'à Newton. La seconde est une science entièrement moderne, dont la formation se rattache aux noms de Galilée, Huyghens et Newton. Comme transition entre les deux, il faut mentionner la *tentative cinématique* de Descartes.

L'histoire du progrès des idées est une source d'enseignements instructifs, en ce qu'elle nous montre l'extension graduelle prise par les concepts et nous

dévoile comment des expériences, instituées dans des cas particuliers, servirent de base à des associations de données sensibles, dues en partie à un travail instinctif antérieur de coordination d'expériences et d'observations familières. Quand cela se produit pour l'esprit humain, il a l'impression de découvrir une vérité générale, indépendante de l'expérience, et que d'aucuns accepteront comme un *principe évident*.

On insiste aujourd'hui, de différents côtés, et avec juste raison, sur ce qu'en aucun cas l'évidence des principes ne constitue une preuve *a priori* contre la possibilité de nouvelles expériences qui les contredisent; et il n'y a pas lieu de revenir sur une question suffisamment discutée au sujet de la géométrie. Mais, à notre avis, c'est aller trop loin en ce sens que de déprécier l'*évidence intuitive*, en mettant en lumière les erreurs auxquelles elle a pu conduire, sans tenir suffisamment compte de ce qu'on a pu les corriger par une plus juste *interprétation* de celle-ci. A ce titre, autant vaudrait déprécier l'expérience directe, puisqu'elle ne nous assure pas contre les dangers d'une interprétation erronée. S'il est hors de doute que l'évidence intuitive doit céder dans un conflit éventuel avec les réponses, critiquement évaluées, de l'expérience, il convient d'observer qu'en fait de tels conflits ne se sont jamais terminés par une véritable condamnation de l'intuition, mais qu'ils ont conduit à embrasser un champ plus large de données sensibles, éliminant la contradiction apparente.

Ces réflexions conviennent particulièrement dans le cas de la mécanique. Les dépréciateurs de l'intuition insistent sur ce que certains principes, considérés comme évidents, contredisent directement les vues de nos plus anciens prédécesseurs. Aucun argument ne semble plus approprié que celui-ci à établir irréfutablement que l'évidence est sans rapport avec un *développement psychologique* s'effectuant suivant des lois déterminées, mais repose seulement sur un *fondement historique;* à moins qu'on ne veuille admettre un changement de l'esprit humain, hypothèse à laquelle il ne vaut pas la peine de s'arrêter.

Un exemple convaincant nous est offert par le *principe d'inertie*, dont nous ne considérerons ici que la partie géométrique : le mouvement rectiligne d'un point matériel que ne sollicitent aucunes forces. Si, comme on l'admet aujourd'hui, ce principe participe, dans un sens précisé plus loin, à l'évidence des symétries géométriques, comment les Grecs ont-ils pu le méconnaître? Comment purent-ils penser que les mouvements *naturels* sont circulaires?

Eh bien! il faut interpréter cette contradiction en ce que notre représentation et celle des Grecs ne se réfèrent pas au même « espace mécanique ». Dans la série des associations et des abstractions successives qui nous ont conduit au concept géométrique de l'espace, il a fallu éliminer des différents espaces physiologiques les dissymétries relatives à l'observateur. Le point de vue général en géométrie a été atteint grâce aux représentations optiques, en faisant abstraction de la dissymétrie systématique introduite par la pesanteur dans les données tactilo-musculaires. Mais, dans le développement intégral de la représentation spatiale, si l'on tient compte de l'aspect du mouvement à la surface de la terre, une nouvelle dissymétrie systématique s'introduit du fait de la rotation de notre planète; si bien que le premier résultat de l'association et de l'abstraction des « espaces physiologiques mécaniques » est une *représentation géocentrique*. Pour dépasser cette étape et pour arriver au degré d'abstraction correspondant à celu

de la géométrie, il a fallu s'affranchir du point de vue géocentrique, et chacun sait comment les fondateurs de la dynamique y furent amenés par les progrès de l'astronomie, qui vinrent confirmer le système de Copernic.

Il n'est pas inutile pour notre but d'observer que, dans la représentation géométrique des Grecs, l'hypothèse du mouvement circulaire répond à une simplification des faits astronomiques, bien qu'ils aient cherché à la confirmer par la prétendue perfection du cercle entre toutes les lignes.

Pour qui reconnaît l'origine expérimentale des connaissances intuitives, il peut sembler absurde de leur accorder, dans l'ordre scientifique, une place en quelque sorte privilégiée. La confiance que nous mettons en elles, bien qu'elle puisse s'expliquer psychologiquement, constitue un motif de défiance vis-à-vis des expériences volontairement exécutées et consciemment critiquées. Mais les choses apparaîtront sous un autre jour, si l'on réfléchit que ces expériences et cette critique, au moins dans une première période de leur développement, sont facilement incomplètes et unilatérales; au lieu que l'élaboration inconsciente des données sensibles représente une grande multiplicité de comparaisons répétées dans les conditions les plus différentes. C'est pourquoi la connaissance intuitive a un plus haut degré de probabilité que la connaissance expérimentale, *quand elles se rapportent au même ordre de relations*. Par contre, dans la délimitation du champ d'application de ces relations et dans son élargissement progressif, l'expérience volontaire l'emporte sur l'intuition instinctive.

Aussi, sans prétendre forcer toute connaissance scientifique à revêtir un caractère intuitif, il est grandement désirable que les acquisitions expérimentales provoquent un développement corrélatif de la représentation intuitive, qui permette de rattacher les faits nouvellement acquis à la masse considérable des connaissances instinctives plus anciennes, au moyen de concepts plus étendus. On acquiert ainsi la garantie qu'il n'y a pas contradiction logique entre les différentes parties de notre savoir, auquel cas certaines associations et abstractions, effectivement accomplies, eussent été impossibles.

Il faut donc reconnaître que la tentative, plusieurs fois renouvelée dans l'histoire de la mécanique, de fonder cette science sur des principes évidents, n'est pas déplacée. On a seulement tort de forcer cette évidence; soit que, partant d'arguments métaphysiques, on l'interprète comme condition *a priori* de la science et de l'expérience; soit qu'on l'étende au delà de son propre domaine d'application. Cette tentative conduit principalement à distinguer une *première catégorie de principes, qui se présentent comme présupposition fondamentale d'une représentation abstraite des phénomènes mécaniques, quand on les subordonne, dans leurs associations, aux concepts d'espace et de temps;* et c'est de là, précisément, qu'ils tirent leur *évidence*.

Mais ces principes évidents, qui constituent les prémisses de la statique et de la cinématique, ne suffisent pas à fonder la dynamique. Il faut y joindre des hypothèses suggérées directement par l'expérience, qui, tout en se rattachant sans doute, en partie, à quelques représentations intuitives, n'ont en somme *rien d'évident*. Ici, surtout, ce qu'il y a d'arbitraire dans notre construction scientifique s'explique par des raisons d'*ordre historique*. Par contre, l'*interprétation psychologique de l'histoire* ne permet pas d'ad-

mettre également une détermination indifférente des premiers principes, bien qu'ils se soient révélés d'une façon fragmentaire et successive dans l'étude des problèmes particuliers.

§ 10. **Concepts fondamentaux.**— Le développement de la mécanique met en lumière, outre les concepts fondamentaux d'espace et de temps, ceux de *point matériel, force, mouvement, masse et liaison.*

Ces concepts se présentent généralement liés à certaines représentations concrètes, et, quand on en a éliminé l'élément subjectif, il ne subsiste plus en eux qu'un ensemble de rapports qui se présentent comme des *hypothèses implicites.* Les principes mécaniques proprement dits établissent entre ces concepts des relations qui constituent les *hypothèses explicites* de la mécanique.

Ces relations permettent de définir nominalement quelques-uns des concepts mentionnés à l'aide des restants. De là, une réduction que d'aucuns ont poursuivie jusqu'à une *interprétation nominaliste* de la mécanique.

§ 11. **Nominalisme mathématique.** — La tendance nominaliste qui envahit aujourd'hui tous les domaines de la physique théorique, mérite quelques considérations particulières.

Cette tendance constitue, en un certain sens, la contre-partie des avantages de l'application toujours plus étendue des mathématiques. Elle a pour cause immédiate une extension illégitime et une fausse idée de la *rigueur scientifique.*

La *rigueur physique* exige que les connaissances soient appuyées sur le plus grand nombre possible de faits, contrôlées par la plus grande variété possible d'expériences; et que les relations énoncées soient

toujours accompagnées d'un substrat de données expérimentales qui permettent d'évaluer le *degré d'approximation* suivant lequel on peut les considérer comme valables.

Une représentation mathématique de la réalité physique, satisfaisant à ces desiderata, serait fournie par une *analyse d'approximation* du genre de celle qui fit l'objet des intéressantes méditations de Robin. Mais, en général, il est utile, on peut même dire indispensable, de procéder plus rapidement à une abstraction préliminaire d'un certain groupe de données empiriques, en énonçant, sous forme de *postulats*, les relations qu'on suppose représenter, dans leur forme simple et précise, *la partie la plus essentielle* des rapports réels ; et en rejetant ainsi sur la théorie entière les erreurs provenant des petites divergences négligées.

Un corps de doctrine ainsi constitué peut arriver à une forme conceptuelle bien définie, telle que son développement déductif s'accomplisse rigoureusement, sans modification du contenu des hypothèses. Mais à l'égard de la réalité, la théorie développée reste toujours une représentation approximative; les postulats apparaissent affectés d'une erreur que seules de nouvelles expériences, en modifiant les hypothèses admises, pourront progressivement éliminer.

Or, à chaque moment du développement scientifique, la rigueur exige que ces erreurs soient évaluées, dans la mesure du possible, en déterminant l'ordre de leur grandeur; mais surtout qu'elles ne soient pas dissimulées et que la cohérence formelle de la construction théorique ne fasse pas illusion sur le caractère approximatif des connaissances qu'elle contient.

Est-il possible qu'un progrès logique dans la critique des définitions et des postulats puisse écarter

ou diminuer de telles erreurs? La question même doit apparaître absurde à ceux qui ont compris le sens de l'abstraction accomplie. Elle nous a permis de scinder le problème en deux parties : l'une hypothétiquement simple, l'autre illimitativement compliquée, mais qui exerce sur la prévision effective une influence relativement minime. Les théoriciens peuvent, en toute liberté, disposer des prémisses hypothétiques en vue du traitement mathématique; ils ne peuvent avoir, en aucune façon, la prétention de conférer, par là, à la théorie un sens physique plus rigoureux.

Ce que l'on peut toujours faire, c'est tâcher de réduire le nombre des postulats qui énoncent ces prémisses. Ce n'est pas chose difficile. Ces postulats se présentent, en effet, sous la forme générale d'équations entre des quantités que l'on considère définies au moyen de certains procédés de mesure; il suffit de prendre une équation de ce genre comme *définition* d'une de ces quantités, à la place de la mesure correspondante. On substitue ainsi à une série d'expériences nécessairement imprécises un acte de libre convention qui a un sens logique précis. On élimine, partant, de la théorie un élément d'erreur, puisque le fait même susceptible d'erreur est éliminé.

Une pareille procédure trouve sa justification dans certains cas, en vue de fins particulières, quand il s'agit, par exemple, d'apprécier les modifications à introduire dans un système d'hypothèses disposées hiérarchiquement, si l'on prend pour prémisse fondamentale une *forme* déterminée, jugée capable d'avoir une compréhension plus étroite. On obtient ainsi un procédé de discrimination des faits placés à la base d'une théorie, qui est d'autant moins expressive qu'elle est plus plastique.

Mais, même en ce sens restreint, une théorie parfaite pourra-t-elle jamais être atteinte? Qu'on essaie, en effet, de transformer tous les postulats en simples définitions : voilà éliminées, du coup, toutes les erreurs, mais toute connaissance effective aussi. La rigueur absolue de la théorie purement formelle se réduit à un non-sens. Il n'est même pas à penser que le théoricien puisse tirer profit d'une telle transformation. Pour lui, il y avait seulement des équations à traiter suivant les règles précises de l'analyse; seulement il savait que ces équations représentent des hypothèses imparfaitement vérifiées, et il a réussi à cacher à ses propres yeux cette imperfection. La liberté de ses développements mathématiques reste, comme auparavant, théoriquement inconditionnée; mais il s'est privé de la vue des motifs seuls capables d'orienter sa recherche vers un but physique.

Les inconvénients d'une pareille procédure apparaissent plus graves, lorsqu'il s'agit de confronter la théorie et l'expérience dans les vérifications et les applications concrètes. A défaut d'une critique préventive de ce que la théorie même veut effectivement signifier, on court le risque d'adopter une mesure de la *rigueur pratique* en contraste criant avec les critères si timorés de la *rigueur théorique*; c'est-à-dire d'accepter d'emblée, sans confrontation aucune, les quantités qu'on a obtenues dans les calculs par une détermination expérimentale quelconque, et d'interpréter la construction théorique en une série de sens différents, qu'on ne distingue pas rigoureusement les uns des autres, en vue des faits qu'on se propose de justifier à cet instant.

Est-ce là le résultat auquel veulent arriver ceux qui cherchent une rigueur absolue? Non certes; mais

ils ne semblent pas s'apercevoir que ce serait la conséquence certaine du nominalisme auquel conduisent une vue incomplète de la science et des prétentions transcendantes.

Conformément aux critères qui ressortent de la critique précédente, nous nous proposons maintenant d'analyser les concepts fondamentaux de la mécanique, en mettant en lumière les différentes hypothèses implicites et explicites qu'ils contiennent, et particulièrement les premières, qui apparaissent souvent, dans l'acquisition psychologique de ces concepts, comme des conditions pour l'association des données empiriques au moyen de représentations abstraites.

§ 12. **Le point matériel.** — Bien que les premiers problèmes de la statique, effectivement traités, concernent des *systèmes* relativement compliqués, tels que le *levier*, la *poulie*, le *plan incliné*, en présence des développements ultérieurs, il paraît néanmoins convenable de commencer l'étude de la mécanique en prenant comme cas le plus simple, celui des « points matériels ».

Une semblable fiction est pleinement justifiée, conformément aux critères de simplification de la recherche scientifique que P. Volkmann considère comme des principes d'*isolement* ou de *superposition* des circonstances phénoménales. Il importe, cependant, de s'arrêter un instant pour éclaircir le concept du point matériel.

Mais, tout d'abord, remarquons qu'on pourrait s'affranchir de cette fiction. En effet, G.-A. Maggi a montré qu'il est possible de fonder toute la mécanique des corps étendus sans considérer les corps comme des systèmes de points. Il faut mentionner ce résultat, tant pour son intérêt philosophique que mathématique, bien qu'il nous semble, à différents points de vue, qu'il est opportun de conserver une place à la représentation du point matériel, pour les raisons suivantes en particulier :

1° Sous différents points de vue, on peut considérer un corps comme un point, sans commettre d'erreur supérieure aux limites de la *rigueur physique* actuelle ; et, si loin qu'on recule ces limites, il y aura toujours des corps qui, dans certains ordres de phénomènes, pourront être considérés sans erreur appréciable comme des points. Dans ces cas, l'exigence qui consisterait à éliminer une telle erreur inappréciable serait hors de mise si elle conduit, comme c'est le cas, à une représentation plus compliquée des phénomènes ;

2° La représentation des corps, comme formés d'éléments ou de points matériels, a un emploi si étendu dans les développements de la physique théorique qu'on ne pourrait y renoncer sans sacrifices.

Mais on ne peut davantage passer sous silence les difficultés propres au concept de point matériel. Dans quelles conditions peut-on traiter un corps comme un point matériel? La première condition requise est que ses dimensions soient *très petites auprès de celles dont on considère les rapports.* A ce titre, un grain de sable dans l'étude du mouvement de la terre, aussi bien qu'un astre dans l'étude des mouvements célestes, peuvent être considérés comme des points. A cette première condition, s'en ajoute une seconde : *il faut que la position du corps, considéré comme mobile autour d'un de ses points, soit indifférente dans les phénomènes considérés.* A ce titre, par exemple, une petite source de lumière polarisée, assimilable à un élément de surface, ne peut être considérée comme un point dans les phénomènes optiques. Nous verrons plus tard l'importance de ces remar-

ques dans l'examen de certains concepts fondamentaux.

Nous allons traiter maintenant successivement de la *statique* et de la *dynamique du point*, puis de celles des *systèmes*.

§ 13. **La force.** — « La force est la cause ou l'effet du mouvement. » Ceux qui accordent à ce jugement la valeur d'une *définition de la force*, sont responsables de la confusion d'idées qui fait que beaucoup considèrent la force comme un concept *métaphysique* au pire sens de ce mot, équivalent à un non-sens. En effet, affirmer qu'une chose est la cause d'une autre, ne peut avoir de sens que s'il s'agit de reconnaître le lien de succession invariable entre deux phénomènes, déjà définis comme tels à l'aide de sensations.

L'existence d'une *force* est un *fait physique* défini par des *sensations musculaires d'effort et de pression*. A ce point de vue, la force n'a rien de mystérieux ou de métaphysique, pas plus que le mouvement ou tout autre phénomène quelconque, dont la définition réelle se réduit toujours, en dernière analyse, à un groupe de sensations qui se produisent dans certaines conditions volontairement provoquées.

Ceux qui veulent bannir de la mécanique l'idée de force peuvent, jusqu'à un certain point, justifier leur prétention en vue d'obtenir une réduction des données primitives de la science du mouvement. Mais ils n'ont pas le droit de prétendre que cette idée est moins intelligible que toute autre idée géométrique ou cinématique, ou que son *explication* implique des difficultés particulières. Un concept physique, en effet, s'explique toujours de la même manière : par l'indication de son contenu sensible.

Cependant les tentatives faites pour éliminer le concept de force dévoilent notre tendance à remplacer l'*explication musculaire* des phénomènes par une explication *optique :* soit d'une façon tout à fait générale, par la supposition d'entités fictives (C. Liv. IV); soit dans le champ plus circonscrit de la mécanique céleste, où les phénomènes se présentent directement à la vue.

Dans ce domaine, en effet, les données musculaires apparaissent comme une hypothèse dont quelques-uns se rient, qui révèlent le caractère anthropomorphique de la force attractive newtonienne ; se peut-il que l'attraction entre Terre et Lune ou entre Terre et Soleil implique des sensations musculaires de la part de ces corps ? Mais, si on laisse de côté la plaisanterie, rien n'est ridicule dans la supposition qu'un homme placé sur la terre puisse éprouver des sensations musculaires correspondant à l'attraction lunaire ou solaire. La première se révèle à nous dans les marées, la seconde peut être mise en évidence par les modifications de la pesanteur au moyen d'expériences délicates. On peut obtenir, en effet, une déviation du fil à plomb d'environ 2″ dans les vingt-quatre heures, récemment mesurée par Newcomb et V. Sterneck, et qui est due à l'attraction solaire, conformément à la prédiction théorique. Il est à noter encore que la supposition de sensations musculaires attribuées à un homme placé en dehors de la Terre, conserve une signification, quand bien même elle n'est pas réalisable.

Quoi qu'il en soit, on peut construire une mécanique céleste, restreinte aux seules données visuelles, en écartant l'idée de force. Il suffit de considérer, avec Mach, le principe newtonien d'action et de réaction, comme un rapport entre les *accélérations* des

points matériels en mouvement, où entrent certains coefficients appelés *masses*.

Mais s'il peut être intéressant d'obtenir ainsi une description purement cinématique, indépendante de la statique, des corps célestes, on ne doit pas oublier qu'elle n'a qu'une valeur très restreinte, et que, notamment, elle fournit une théorie de la gravitation, dans laquelle la chute des corps sur la terre est sans rapport avec le poids ; où, par exemple, les expériences vérificatrices de Cavendish ne sauraient trouver place.

Que dire d'une conception qui mutile à ce point nos connaissances ? Il est vrai que la conception de Mach ne tend pas à remplacer d'une façon systématique la force par une définition nominale, en la regardant comme le produit d'une masse par une accélération : ce serait plutôt le point de vue de la mécanique de Kirchhoff. Ici, la force introduite, par exemple, dans la théorie de l'élasticité, n'exprime plus le contenu sensible que nous nous représentons dans ce domaine comme tension. Si donc, à l'égard de l'astronomie, le traitement optique de la mécanique avait encore jusqu'à un certain point sa raison d'être, il n'en est plus de même de l'extension de ce procédé à une mécanique générale, dès que l'on abandonne les préjugés sur la force et les motifs qui expliquent, mais ne justifient pas, le nominalisme mathématique.

Ces considérations nous conduisent à prendre la force pour concept fondamental de la mécanique. Le sens initial de la *force* est fixé par les *sensations musculaires possibles* d'effort et de pression, *dans un système de référence donné, et sous certaines conditions requises*.

Ce sens est précisé par l'emploi d'instruments appropriés et *étendu* par l'hypothèse qui se rattache au concept d'un *champ de forces*. Un champ de forces est *donné* (par rapport à certains corps et phénomènes qui le définissent), quand on admet la possibilité de reconnaître la force qui agit sur un point matériel transporté aux différents points de ce champ.

Il faut maintenant déterminer plus exactement le concept de force, en analysant les données sensibles qui s'y rattachent.

§ 14. **Données géométriques de la force.** — Les sensations inhérentes à une force déterminent :

1° Une *direction* et un *point d'application ;*

2° Une grandeur *intensive* qu'il s'agit de préciser.

A cette fin, il faut acquérir, avant tout, la notion de « *forces égales* appliquées en différents points et diversement dirigées ». Cette notion nous est tout d'abord fournie, bien que d'une façon peu précise, par la comparaison des sensations d'effort et de pression que nous sommes capables d'éprouver en différentes positions. Le jugement d'égalité entre deux forces qu'elle nous permet d'énoncer, est précisé par l'association des sensations précédentes à des données physiques telles que, par exemple, la tension ou le ploiement d'un ressort ou d'un fil élastique, etc. De semblables tensions et pressions, liées à certains corps mobiles, satisfont sensiblement aux deux propositions fondamentales suivantes :

1° De se reproduire identiquement (sauf en cas de complications particulières), quand le corps reprend sa forme et sa position primitives ;

2° De s'accorder entre elles, pour toutes positions des corps auxquelles elles se rapportent, dès que cela a lieu pour une seule.

Il y a d'ailleurs parallélisme entre le processus qui

conduit ainsi à la représentation de « forces égales » et celui, en géométrie, qui conduit à la notion de « figures égales », grâce aux mouvements des corps solides qui satisfont à certaines conditions d'invariabilité, par rapport à l'organe tactile d'un observateur.

Il faut noter, de plus, qu'une force, de quelque façon qu'elle soit donnée sur terre, peut être remplacée par une force de tension égale exercée par un poids le long d'un fil enroulé sur une poulie. Cette substitution a l'avantage de déterminer les forces d'une façon commode, plus précise, et d'offrir une image concrète, très simple, des éléments qui les caractérisent. Ce sont les forces engendrées par des poids que considèrent les fondateurs de la statique. C'est à leur image concrète que se rattache la *mesure* d'une force, et, par conséquent, sa détermination au moyen d'un nombre ou d'un vecteur. Il suffit, pour cela, de considérer les tensions exercées le long d'un fil, auquel on a suspendu un, deux, trois... *poids égaux*, et d'observer que, de quelque façon que l'on procède à une telle évaluation des forces (au moyen de masses diversement pesantes), on retrouve toujours que « des multiples de forces égales sont égaux ».

Les expériences qui fournissent ainsi la mesure *statique* d'une force, constituent un cas particulier d'expériences plus générales que l'on peut considérer comme idéalement répétables en dehors de la terre.

« Plusieurs forces agissant dans la même direction sur un point matériel peuvent être remplacées, par rapport à leurs effets (tensions, pressions, etc.), par une force unique qui s'appelle leur *somme* ». Et si l'on représente la *somme statique* de plusieurs forces, dirigées dans le même sens, par leur *somme géométrique*, il en résulte qu'à chaque force correspond, à un facteur près qui dépend de l'unité de mesure, un *segment dirigé*, défini en grandeur et en direction.

§ 15. **Principes de la symétrie statique.** — Une idéalisation progressive de l'expérience nous fournit déjà, comme nous venons de le voir, une *image géométrique* simple de la force agissant sur un point matériel. A cette image se rattachent les premiers principes de la statique avec une si grande évidence qu'on a peine à reconnaître en eux quelque chose de plus qu'une connaissance purement géométrique.

Il s'agit de certaines *symétries* des *forces en équilibre* qui, dans le traitement même des premiers problèmes de la statique, se trouvent employées implicitement comme notions déjà acquises :

1° Des forces égales et opposées, agissant sur un point O, se font équilibre, et réciproquement;

2° Si un point matériel A exerce une force sur un autre point matériel B, celle-ci est dirigée suivant la droite A B, et le point B exerce sur A une force égale et opposée (*principe d'action et de réaction*).

Il convient d'observer que ces principes traduisent des expériences faciles et familières, se rapportant d'ailleurs (en ce qui concerne la seconde) au cas de tensions ou de pressions exercées par des fils ou des corps solides. Mais, si nous cherchons à nous rendre compte de leur fondement véritable, nous verrons que, selon le principe de raison suffisante, ils dérivent de la symétrie des figures représentées ; dans le premier cas, de la symétrie par rapport au plan perpendiculaire en O aux deux forces; dans le second cas, de la symétrie de l'espace par rapport à un segment A B, et à son point médian (indépendance des rotations autour de la droite A B et irréversibilité du segment).

Ce serait pure illusion que de voir en ceci une

démonstration géométrique des principes statiques en question. Les observations et les expériences sur les forces et sur leur équilibre, bien que très proches de celles dont est sortie la géométrie, impliquent véritablement quelque chose de plus, qui n'est pas nécessairement compris dans la représentation de l'espace physique. Cependant, le contenu de cette représentation est extensible, et les considérations précédentes montrent qu'il peut être étendu de manière à embrasser les données statiques considérées. En d'autres termes, les principes de la symétrie statique expriment déjà en partie que « les images géométriques (segments dirigés) sont adéquates à la représentation des forces, par rapport aux phénomènes d'équilibre ». Sous cette forme, leur contenu réel apparaît comme une *condition de possibilité* de cette représentation, dont dépend leur évidence.

§ 16. **La composition des forces.** — La somme des forces dirigées dans un même sens n'est qu'un cas particulier de la « *composition des forces* ». Le principe général de celle-ci se subdivise en deux parties, l'une statique et l'autre dynamique :

1° Dans les phénomènes d'équilibre, plusieurs forces appliquées en un point peuvent être remplacées par une force unique (la *résultante*), bien déterminée et *équivalente à tout le système;*

2° Des systèmes statiques de forces équivalentes et appliquées en un point sont encore équivalents par rapport à leurs effets dynamiques (mouvements).

Ce second postulat, reconnu par d'Alembert dans la dynamique des systèmes, constitue déjà, dans le cas du point, une supposition que la critique doit mettre en lumière, mais qui sort du domaine propre de la statique étroitement comprise.

On est arrivé historiquement à la découverte du principe de la composition des forces, par induction, à travers des cas particuliers : Stévin y est parvenu en se basant sur la composition des forces perpendiculaires, qu'il connaissait indirectement. Plus tard, c'est-à-dire à la suite des constructions dynamiques de Galilée et de Newton, Varignon réussit à établir et à expliquer la composition des forces, en la dérivant de celle des mouvements, et en traitant la statique comme un cas particulier de la dynamique.

Par l'une et par l'autre voie, le résultat fut acquis sous sa forme concrète (*parallélogramme des forces*); et, c'est seulement après sa découverte, que Bernoulli et Foncenex songèrent à déduire la règle de la composition des forces du principe abstrait de l'existence de la résultante et des principes de symétrie. Cette méthode fut perfectionnée par d'Alembert et Poisson, et reprise de nos jours par Battaglini, Genocchi, Darboux, Siacci, Andrade.

Mach observe qu'il ne s'agit pas ici d'une démonstration géométrique. D'accord avec lui sur ce point, nous ne saurions pourtant partager son avis lorsqu'il déclare qu'on doit repousser cette façon de traiter le problème comme un non-sens historique et psychologique. S'il est vrai que la règle concrète de la composition de deux forces ait été trouvée la première, et qu'elle ait été tirée d'expériences faciles, il nous semble pourtant, d'autre part, qu'on doit admettre la notion implicite de l'*existence d'une résultante* comme idée directrice des recherches qui ont conduit à sa découverte. En effet, une observation élémentaire nous révèle tous les jours que, si un point est tiré par plusieurs fils, il faut exercer sur lui une traction dans un sens déterminé pour le conserver en équilibre, exactement comme si le point était tiré en sens

opposé par un seul fil. On a, ici, une expérience très simple, qui peut être considérée, en un certain sens, comme qualitative par rapport à la détermination quantitative de la résultante et à laquelle on est, par conséquent, disposé à attribuer une grande force de démonstration.

Admettons à titre d'hypothèse physique le postulat suivant : « Un système de forces concourantes équivaut statiquement à une force unique, bien définie, leur *résultante*. » Pour évaluer cette force, il faut savoir :

1° Qu'on peut déterminer la résultante, en substituant à quelques-unes des forces composantes, un système équivalent (*propriété associative et commutative* de la composition);

2° Que des systèmes de forces géométriquement égaux sont équivalents et donnent, par conséquent, des résultantes égales.

Ces propositions constituent autant d'hypothèses physiques, mais qui s'appuient, comme les principes de symétrie, dont il faut également se servir ici, sur la supposition générale que « les forces sont adéquatement représentées, dans tous leurs rapports statiques, par leurs images géométriques ». C'est aussi le fondement de leur évidence, qui implique, ainsi, une plus large coordination conceptuelle des différentes données sensibles.

Ce n'est pas à tort, selon nous, que l'esprit se repose dans une telle évidence, parce qu'elle exclut la possibilité d'une correction des expériences vérificatrices du principe, sans altérer profondément l'aspect général de tous les rapports statiques déduits de la comparaison d'observations et d'expériences conscientes et inconscientes.

CHAPITRE III

LES CONCEPTS ET LES PRINCIPES FONDAMENTAUX DE LA MÉCANIQUE.

§ 17. **La fondation de la dynamique.** — Le développement historique de la dynamique, de Galilée à Huyghens et à Newton, aboutit essentiellement à deux principes généraux : l'équation du mouvement d'un point, et le principe dynamique de l'égalité de l'action et de la réaction.

Cherchons à nous rendre compte de quelle manière, et en quel sens, ces principes ont été déterminés dans la systématisation de Newton, et quelles hypothèses implicites se rattachent aux concepts liés par eux.

L'équation du mouvement d'un point matériel, contenu dans les deux premières lois de Newton, exprime que « les forces sont proportionnelles aux masses et aux accélérations qu'elles impriment et dirigées dans le même sens ». Sa formule vectorielle est

$$f = m\gamma.$$

On exprime ainsi, quantitativement, le rapport causal entre la force et le mouvement que révèlent les expériences les plus élémentaires et où figure un coefficient m qui dépend du point matériel.

Il convient de se rendre compte des difficultés

qu'on a dû vaincre pour arriver à la formule précédente. Observons, tout d'abord, que les forces produites en général par les muscles ou par le ploiement d'un ressort, etc., si elles ne sont pas équilibrées par une résistance, sont de très courte durée, et se traduisent dans une *impulsion* qui se mesure directement par la *vitesse* du corps lancé. Quand il s'agit, inversement, d'une force continue, par exemple de la pesanteur, la constatation sensible que nous en faisons comme effort musculaire s'accomplit différemment, pour un corps en mouvement, suivant la vitesse avec laquelle notre main accompagne ou retarde le mouvement. Il vient s'y ajouter encore l'influence du frottement dans la traction sur la terre, qui rend la force attirante sensiblement proportionnelle à la vitesse du mouvement. De tout cela, il résulte que la première idée, suggérée par un empirisme grossier, conduit au principe aristotélicien de la proportionnalité des forces aux vitesses. Seule, une analyse pénétrante a pu conduire à la découverte que les forces sont en rapport, non pas avec les vitesses, mais avec les accélérations communiquées.

Comment cette correction s'est-elle accomplie? Comment Galilée reconnut-il la fausseté du principe aristotélicien? Evidemment, par ses études sur la chute des graves, où une force, la pesanteur, est implicitement considérée comme indépendante du mouvement et proportionnelle à l'*accélération*.

Mais la question, à laquelle se rattache le développement du concept même de force, est élucidée quand on se rappelle la discussion survenue entre les écoles de Descartes et de Leibniz, au sujet de la mesure d'une force agissant sur un point mobile par la vitesse ou son carré.

Nous savons aujourd'hui que la proportion de Des-

cartes subsiste quand on considère des forces constantes (f), agissant pendant un certain temps (t), et celle de Leibniz quand on se réfère à des forces qui s'exercent pendant un certain parcours (s) du point mobile. Les quantités

$$ft = mv$$

et

$$fs = \frac{1}{2}mv^2$$

ont reçu respectivement les noms de « *quantité de mouvement* » et de « *force vive* »; la première mesure l'*impulsion* de la force, la seconde l'*énergie cinétique* (E) acquise par le mobile ou le *travail* accompli.

En différenciant la première des deux équations précédentes, on obtient l'équation fondamentale de Newton

$$f = m\frac{dv}{dt} = m\gamma;$$

En différenciant la seconde on aurait une autre équation

$$f = \frac{dE}{ds},$$

qui fournit également la mesure dynamique de la force et peut servir de point de départ à une *Dynamique énergétique*.

L'équation fondamentale du mouvement d'un point

$$f = m\gamma$$

résume une série de faits qui lui confèrent son sens physique propre.

Ce sens doit être déterminé par une interprétation convenable, qui exige :

1° Que l'on fixe un système de référence par rap-

port auquel soient définis le mouvement et la force ;

2° Que l'on définisse physiquement le coefficient m (masse).

Galilée, dans l'étude de la pesanteur, avait pris comme système de référence, la Terre ; comme mesure de la masse, le poids. Newton, en passant dans le champ de l'astronomie, devait modifier ces concepts et chercher à leur conférer une base absolument générale, en prenant, comme système de référence, un *espace en repos absolu*, et, comme masse, un nombre appartenant au corps pris isolément de tout autre (le produit du volume et de la *densité*). Il suppléa au manque de définition de ce nombre en transportant de la statique à la dynamique le *principe d'action et de réaction*, considéré comme un « *rapport entre les accélérations* » des points en mouvement.

Un point de vue transcendant domina l'esprit du systématiseur de la dynamique, et le conduisit à énoncer les définitions et les principes d'une façon telle que, pris étroitement, ils sont en partie dénués de sens. Mais on tire une nouvelle systématisation des principes de l'œuvre même de Newton, si, par une critique convenable, on cherche à mettre en lumière les prémisses supposées par les développements positifs d'une doctrine généralement acceptée comme une acquisition incontestée jusqu'à nos jours.

C'est une critique de ce genre que nous nous proposons d'entreprendre en discutant successivement :

1° Des façons de déterminer le mouvement que Newton considérait comme absolu, et pour lesquelles sont valables les lois de la dynamique ;

2° De la masse et des postulats qui s'y rattachent ; et de leur relation avec le principe newtonien d'action et de réaction ;

3° De la loi fondamentale exprimée par l'équation

du mouvement matériel, et, en particulier, de la double supposition qu'elle implique, et dont il reste une trace dans l'énoncé donné par Newton.

Nous tirerons enfin de cet examen quelques conclusions générales sur les principes de la dynamique.

§ 18. **Le mouvement.** — La notion géométrique du mouvement est tout à fait relative. Etant donné un ensemble de corps, on dit qu'ils se déplacent les uns par rapport aux autres, quand leurs distances mutuelles varient avec le temps. Une telle définition, parfaitement symétrique à l'égard des différents corps, ne nous permet pas de distinguer ceux qui *se déplacent réellement*, et ceux qui *restent en repos*. Les mots mêmes de « repos » et de « mouvement », si on ne se réfère pas à autre chose, demeurent vides de sens.

Le choix d'un corps de forme invariable, que l'on convient de considérer comme fixe, équivaut donc à prendre un *système de référence* qui, géométriquement et cinématiquement parlant, est tout à fait arbitraire. La *perception du mouvement* d'un objet quelconque correspond, d'abord, au choix personnel d'un tel système de référence : nous rapportons inconsciemment les changements de position des objets aux axes liés à notre propre corps. On se fût borné à cette conception physique du mouvement, si l'aspect des phénomènes ne variait pas corrélativement avec cette sensation interne que nous appelons le *mouvement de notre propre corps*.

Par association et abstraction des diverses représentations physiques du mouvement, on est conduit à prendre la Terre comme système de référence et ce choix, quand on se limite à l'étude des phénomènes sur la terre, s'impose à tous les esprits.

Combien de temps fallut-il pour que l'homme en vînt à reconnaître la relativité d'un tel repère dans le champ de l'astronomie; et quelle lutte contre une croyance irréductible des esprits qui, à défaut d'arguments, prétendait se soutenir par la violence!

Mais, en fin de compte, l'étude approfondie du mouvement du système solaire imposa le choix d'un système de référence plus commode; le soleil fut pris comme fixe à la place de la terre. Et, pourtant, lui aussi, se meut, outre d'une rotation autour de lui-même, d'un mouvement de translation par rapport à l'ensemble des étoiles lointaines. Parmi celles-ci, lesquelles faut-il considérer comme fixes, du moment qu'elles changent de position les unes par rapport aux autres, comme on le déduit de la comparaison des observations astronomiques les plus anciennes avec les plus récentes, et des études spectroscopiques basées sur le principe de Doppler?

A défaut d'un système de corps que l'on puisse raisonnablement considérer comme immobile de préférence à tout autre, on a voulu donner au *mouvement absolu* une signification indépendante des corps, en concevant l'*espace* comme un système de référence invariable, et le mouvement, comme une variation de position des corps *par rapport à un tel espace*. C'est le point de vue transcendant de Newton.

Il est inutile de le réfuter, car nous avons déjà vu qu'il n'y a pas d'objet qui corresponde au mot « espace ». D'ailleurs, étant donné le progrès de la pensée critique, aucun philosophe moderne n'attribuerait plus de signification au mouvement absolu défini plus haut.

Et, pourtant, cette définition réapparaît, sous une forme nouvelle, quand on postule, comme Volkmann, un *éther* remplissant l'univers, auquel on rapporte les mouvements. Bien entendu, on doit se représenter les parties de cet éther comme invariables dans leur position les unes par rapport aux autres.

Une telle hypothèse peut-elle conduire à attribuer un sens positif au mouvement absolu? La réponse implique la discussion de quelques faits. Il est évident que le mot « éther », mis simplement à la place du mot « espace », ne nous dit rien de plus. Mais le cas est différent si l'on admet, par exemple, une action retardatrice due au frottement exercé par l'éther sur la matière en mouvement, en postulant ainsi, en substance, à la place de la loi d'inertie, la tendance des corps à un état limite de repos relatif. Cet état limite est pris alors comme système de référence du mouvement auquel on veut attribuer un sens absolu.

Ce qui manque à une telle hypothèse, c'est d'être basée sur des faits : il semblerait plus plausible de considérer les « mouvements relatifs à l'éther » comme des « mouvements relatifs à la lumière ou à d'autres phénomènes électromagnétiques » se rapportant au même ordre de faits que l'*aberration astronomique*. Nous nous réservons de revenir au Livre III sur les problèmes qui se rattachent à cette question. Disons, dès maintenant, que dans l'aberration et dans les problèmes analogues, les expériences ne mettent en lumière rien de plus que le *mouvement relatif des corps les uns par rapport aux autres*.

Revenons au mouvement relatif des corps. Dans l'impossibilité où nous sommes de rien découvrir de fixe dans la comparaison des corps pris individuellement, il nous vient naturellement à l'idée de dériver *quelque chose de stable de leur ensemble*. Ainsi, par exemple, dans le système planétaire, la détermination du *centre de gravité*, comme point fixe de référence,

n'est affecté d'aucun arbitraire. Il est à présumer, pourtant, si l'on admet l'infinité de l'univers, qu'il n'existe pas un *centre de gravité du système de tous les corps célestes*, c'est-à-dire un point limite des barycentres des différents systèmes partiels de corps, *indépendant de l'ordre* de ces corps. Cependant, si l'univers astronomique ne nous offre pas de *point* qui puisse être raisonnablement considéré comme fixe, une simple observation nous conduit à déterminer des *directions fixes, ou presque fixes, à l'égard de l'ensemble des corps*.

Cette observation est la suivante : tandis que le perfectionnement des instruments d'optique nous fait découvrir des étoiles *à des distances toujours plus grandes, leurs vitesses relatives*, en tant qu'on peut en arguer des variations angulaires de leurs rayons visuels et du principe de Doppler, *ne dépassent pas* certaines limites relativement très petites.

Or, si l'on attribue à cette observation la valeur d'un *postulat* général, *les droites, joignant des couples de points matériels éloignés* (étoiles), *tendent, avec l'augmentation des distances, à prendre des directions invariables les unes par rapport aux autres*. Puisque l'on peut considérer ces directions limites comme *astronomiquement fixes*, il sera tout naturel de les prendre comme système de référence idéal pour l'ensemble de tous les corps célestes. Plus exactement, puisque en réalité cette limite est inattingible, nous dirons que l'univers astronomique, si on accepte le postulat énoncé, nous fournit un système de directions d'autant plus *fixes* qu'on parvient à observer des étoiles plus lointaines.

La valeur pratique de cette détermination apparaît dans ce fait que les rayons visuels allant de la terre à toutes les étoiles proprement dites conduisent déjà à

des directions dont les angles ne varient sensiblement qu'*après des années*, et fournissent ainsi un système de référence suffisant pour les besoins de la pratique. On peut introduire une correction progressive par la comparaison des variations angulaires, c'est-à-dire en écartant les étoiles les plus proches, dont les orientations varient plus rapidement que celles des autres.

Il est remarquable que les lois de la dynamique newtonienne conduisent, d'autre part, à retrouver les directions fixes précédentes ; et un tel résultat compense amplement la malheureuse expression de Newton qui admet le concept du mouvement absolu comme donné *a priori*.

Ainsi que nous l'avons déjà vu, l'équation du mouvement d'un point matériel fut considéré d'abord implicitement par Galilée dans le cas de la pesanteur et *relativement à la terre*. Mais une comparaison plus approfondie des données astronomiques conduit à corriger cette loi, en montrant qu'elle a une valeur plus précise en la rapportant aux directions des étoiles fixes. Or, si l'on veut donner aujourd'hui un sens positif à l'hypothèse implicitement introduite par Newton d'un mouvement absolu, il semble qu'on doive énoncer le *postulat* suivant :

Les lois dynamiques se vérifient avec d'autant plus de précision qu'elles se rapportent à un système d'axes, dont les directions se rapprochent davantage des directions astronomiquement fixes.

Grâce aux lois de la dynamique, on peut donner aux « directions fixes » un nouveau sens qui ne dépende plus directement de l'astronomie, mais qui reste cependant toujours *relatif*, soit en se référant au mouvement d'un point matériel, soit au mouvement d'un *corps solide;* dans ce cas, la dynamique

permet de déterminer certains *axes et plans invariables*, c'est-à-dire des axes et des plans qui forment *des angles constants* avec ceux déterminés de même manière par *un autre corps mobile*.

Il importe de remarquer plus précisément que, dans toutes ces déterminations, n'interviennent que des directions ou des positions de plans invariables, et *rien de plus*. Dans ce but, prenons comme point de départ la loi newtonienne du mouvement et distinguons les systèmes de référence en deux catégories :

1° Les systèmes pour lesquels est valable la loi précédente ;

2° Les systèmes pour lesquels l'équation du mouvement est différente et plus compliquée.

On peut considérer, *par convention*, un système de la première catégorie (α) comme *fixe*, et parler de *mouvement* (ou, si l'on préfère, de mouvement *absolu*) relatif à α. Mais il s'agit de voir ce qu'il y a d'*arbitraire* dans une telle convention, c'est-à-dire de quelle façon les systèmes de la première catégorie peuvent se mouvoir les uns par rapport aux autres.

Dans ce but, en maintenant notre convention, imaginons-nous enfermés dans une cage P qui se déplace d'une façon quelconque à travers les espaces célestes. On se demande si, et comment, des expériences sur le mouvement des corps à l'intérieur de P pourraient nous renseigner sur le mouvement de la cage par rapport à α. Pour cela, supposons que nous ayons emporté les instruments nécessaires pour explorer le champ intérieur à P, et pour déterminer, directement et indirectement, les forces qui s'exercent sur un point matériel qui se déplace à son intérieur, etc.

En général, on admet que les forces révélées par l'exploration en P sont des *forces absolues*, c'est-à-dire

indépendantes du mouvement de P, et alors une analyse mathématique de la question conduit au résultat suivant :

Le mouvement du système P, par rapport à α, peut être déterminé par des expériences intérieures à P, à une *translation uniforme* près; c'est-à-dire que les systèmes de référence de la première catégorie, pour lesquels sont valables les lois de la dynamique, sont en repos ou se meuvent les uns par rapport aux autres d'une *translation uniforme*.

Cette conclusion est erronée, parce que toutes les expériences possibles qui mettent en lumière des forces à l'intérieur de P dépendent en partie du mouvement de P. Il convient de nous expliquer sur ce point.

Un mode quelconque de constatation sensible d'une force nous fait connaître ou la force relative au système auquel appartient l'instrument pris comme fixe, ou les différences entre les forces qui s'exercent sur les différents points du champ accessible. Une force, qui agit également, avec une même intensité et une même direction sur tous les points d'un champ, ne peut être constatée, et on peut la considérer comme inexistante relativement à lui, en faisant abstraction des corps environnants.

Il est vrai que nous constatons le choc d'une locomotive qui nous transporte, mais cela n'a lieu que parce que la nouvelle force, en s'opposant au mouvement de la machine, agit seulement sur le matériel qui nous transporte et non sur notre propre corps. Nous constatons, de même, la pesanteur qui agit sur les corps placés à la surface de la terre; mais cette constatation n'est rendue possible que par la résistance de la terre, qui, étant soutenue par les couches inférieures, ne peut tomber et se trouve ainsi soustraite à la pesanteur. Si, par contre, nous nous trouvions

enfermés dans une cage tombant à terre, nous éprouverions la sensation bien connue du manque de la pesanteur ; mais notre situation, durant la chute, serait en tout semblable à celle d'une personne qui se trouverait enfermée dans une cage située en dehors de la sphère d'attraction terrestre ; seulement le choc avec la terre résoudrait du coup, d'une façon terrible, le doute de l'hypothétique voyageur céleste qui s'interrogerait sur le mouvement de sa prison.

Par conséquent, les explorations à l'intérieur de notre cage ne nous révéleront rien sur le mouvement de P, par rapport à un système α de la première catégorie.

Il en est tout autrement pour les rotations de P. En effet, si P évolue autour d'un axe, nous pourrons reconnaître dans son champ, contrairement au postulat de la dynamique newtonienne analysé au § 22, des forces apparentes qui ne dépendent pas seulement de la position et qui agissent sur les corps en mouvement ; elles correspondent aux *forces centrifuges composées* du théorème Coriolis. D'une façon plus simple, mais en substance équivalente, nous pourrons reconnaître le mouvement rotatoire de P, grâce à des expériences sur le mouvement des corps solides, en constatant, par exemple, que les axes permanents de différents gyroscopes changent tous également de direction, en formant entre eux des angles constants, et qu'une force est requise pour les dévier. D'où suit le résultat positif de notre analyse :

La notion de *force relative* à un système de référence permet de *déterminer, à l'aide d'expériences intérieures* à ce système, interprétées conformément aux principes de la dynamique, *le mouvement* du système par rapport à α, seulement *à une translation quelconque près*.

En d'autres termes, les systèmes de la première catégorie pour lesquels sont valables les lois de la dynamique, ne sont pas nécessairement en repos relatif, mais peuvent se mouvoir l'un par rapport à l'autre d'un *mouvement de translation quelconque* (*uniforme* ou *non uniforme*).

Une illustration nous en est fournie par les expériences qui ont permis de révéler le mouvement de *rotation de la terre autour d'elle-même*, c'est-à-dire par le pendule de Foucault et par la déviation en Est de la chute des graves, prévue par le théorème de Coriolis et constatée par Tadini (1796), et, plus parfaitement encore, par Reich (1831).

Le *fait* que comporte l'affirmation que « la terre tourne », indépendamment de la comparaison avec les étoiles, est donc celui-ci : dans les phénomènes de mouvement sur la terre, analysés avec une exactitude suffisante, on rencontre les mêmes circonstances caractéristiques que celles présentées par une observation superficielle des phénomènes de mouvement sur un corps tournant, par exemple sur un vaisseau qui décrit un cercle.

L'affirmation que la terre tourne autour du soleil a théoriquement une signification analogue ; mais il ne semble pas qu'on puisse exécuter les expériences précédentes avec une précision suffisante pour mettre en évidence les circonstances dont il s'agit. Si, cependant, on confronte le mouvement de la lune autour de la terre avec la chute des graves, on doit interpréter les perturbations de ce mouvement dans un sens analogue à celui des expériences de Tadini et de Reich. Une preuve indirecte de la rotation de la terre autour du soleil est encore fournie, sur la terre, par les expériences qui mesurent les variations de la pesanteur pendant la journée.

L'analyse instituée au sujet du concept dynamique du mouvement, pris par Newton comme absolu, montre qu'il implique une supposition de fait : l'accord des différentes méthodes de détermination d'un système de directions formant entre elles des angles invariables. C'est ce que doit mettre avant tout en lumière l'analyse de ce concept. On obtient clairement ce résultat, quand on prend pour système de référence les *directions astronomiquement fixes* et qu'on postule, par conséquent (dans la loi de Newton, etc.), le repos relatif d'autres directions définies par le mouvement des corps dans des conditions données. On arrive ainsi à la proposition de Mach, qui a trouvé aujourd'hui une grande faveur auprès des esprits les plus positifs.

Quand, dans les paragraphes suivants, nous parlerons de « mouvement », nous sous-entendrons précisément cette détermination astronomique du système de référence ; mais nous aurons lieu de remarquer qu'il convient d'isoler une *partie plus générale de la dynamique antérieure à la loi de Newton, qui reste valable quand on considère des forces et des mouvements relatifs à un système de référence quelconque.*

§ 19. **La masse.** — Lorsque l'on veut rechercher les circonstances déterminantes du mouvement des corps, il semble naturel de distinguer autant que possible les caractères *intrinsèques* du corps mobile de ses relations *extérieures* avec d'autres corps.

Cette distinction entre en jeu, très nettement, dès les premiers cas où il s'agit de mouvements imprimés par un effort musculaire ou par la traction d'un fil élastique, etc. Une indépendance relative se révèle entre deux éléments déterminants qui se superposent dans le phénomène : celui que nous mesurons comme

effort musculaire, etc., la force ; et celui que nous rattachons au corps mobile, son *poids* ou sa *masse*.

Poids et masse apparaissent tout d'abord comme identiques. Mais Mach explique, avec sagacité, comment on parvient à les distinguer à l'aide d'une expérience où deux poids suspendus à une poulie constituent un système en équilibre indifférent, qu'on ne peut mettre pourtant en mouvement, sans déployer un effort proportionnel à la somme des deux poids.

Newton, qui avait reconnu dans la masse quelque chose de distinct du poids, en vint à se la représenter comme *quantité de matière* qu'il définit ainsi : « *Quantitas materiæ est mensura ejusdem orta ex illius densitate et magnitudine conjunctim* ».

Cette définition est généralement critiquée, parce qu'elle introduit, à la place de la masse, un nouveau concept non défini, la densité, aussi obscur que celui qu'on prétend expliquer.

Il est injuste cependant de considérer, pour cela, la définition de Newton comme tout à fait privée de sens. On peut interpréter, en effet, la représentation qu'elle contient comme un ensemble de conditions caractérisant un *invariant additif*, par rapport à un certain *groupe de transformations physiques* des corps (mouvements, compressions et dilatations). C'est ce que nous allons essayer d'expliquer.

Commençons par observer que la comparaison des corps nous conduit à nous les représenter par des concepts abstraits, à propos desquels nous pouvons parler de corps *physiquement égaux*, et, par conséquent, de corps *homogènes*. Une telle abstraction équivaut à reconnaître la possibilité de *substituer* entre eux des corps considérés comme « égaux » dans les différents groupes de phénomènes (physiques, chimiques, etc.). En partant du concept général de l'éga-

lité physique, on peut procéder à des abstractions ultérieures, relatives à certains ordres de phénomènes; des corps, substituables par rapport à ceux-ci, jouiront d'une égalité relative plus générale ou posséderont, si l'on préfère, certaines *propriétés égales*.

Une méthode générale pour arriver à de telles abstractions consiste à considérer les *groupes d'opérations ou de transformations* (physiques, chimiques, etc.), *qui permettent de rendre égaux certains corps inégaux*.

L'abstraction conduit alors à définir « un rapport d'égalité » satisfaisant aux propriétés transitive et symétrique pourvu qu'il s'agisse proprement d'un *groupe* de transformations au sens que les mathématiciens attribuent à ce mot, c'est-à-dire que :

1° Si les opérations A et B appartiennent au même groupe, le produit de ces deux opérations, exécutées successivement, fasse encore partie de ce groupe ;

2° Si A appartient au groupe, l'opération *inverse* en fasse également partie.

Le plus simple des groupes de transformations des corps est *le groupe des mouvements*, et le concept de l'égalité physique comporte qu'elle ne soit pas altérée par les mouvements. C'est ce qu'on exprime en disant que toute égalité physique est un *invariant* de ce groupe.

Un autre groupe simple d'opérations physiques est obtenu quand on divise un corps en parties, et qu'on réunit celles-ci de toutes les manières possibles; ce nouveau groupe nous conduit à une *égalité physique* plus générale, *qui fait abstraction de la géométrie des corps*.

On arrive alors à la considération du *groupe* G, constitué par les *mouvements*, *divisions* et *recompositions*, *compressions* et *dilatations* des corps.

La représentation newtonienne de la masse comme

« quantité de matière » conduit à essayer de définir pour chaque corps un *nombre positif*, tel :

1° Qu'il ait la même valeur pour les corps réductibles entre eux au moyen du groupe de transformations G;

2° Qu'il jouisse de la propriété *additive* ou distributive, relative à la somme de deux corps, de sorte « qu'en réunissant deux corps, la masse du nouveau corps ainsi formé soit égale à la somme des masses des deux corps composants ».

C'est ce qu'on exprime en disant que la masse est définie comme un invariant *additif des corps par rapport au groupe G. L'existence d'un tel invariant* implique une supposition de fait que l'on doit admettre à titre de postulat. La nécessité de ce postulat résulte de l'observation que le groupe restreint, constitué par les mouvements, divisions et recompositions, admet un seul invariant additif, le « *volume* ». On peut exprimer le postulat exigé ici, sous sa forme la plus simple, en se rapportant à des corps homogènes :

Soient deux corps homogènes, A et B, physiquement égaux, et que l'on fasse subir à B des divisions et recompositions, compressions et dilatations; si, après un cycle quelconque d'opérations, on arrive à un corps homogène, dont les parties soient égales à celles de A, ce corps a le même volume que A.

Bornons-nous, pour le moment, à considérer un ensemble de corps dont les parties puissent être rendues égales par des transformations du groupe G. On peut choisir un corps homogène de référence, A, et prendre, pour chacune de ses parties, *la masse proportionnelle au volume*, de manière à définir la *densité* d'un corps élémentaire B (considéré comme homogène) par l'inverse du rapport de son volume à celui d'un de ses éléments qui, par transformation, a été

rendu égal à une partie de A. La masse est alors définie, suivant Newton, comme le *produit du volume par la densité*.

Le processus d'abstraction qui conduit à la définition newtonienne de la masse ne s'applique pas, comme nous l'avons vu, à l'ensemble de tous les corps, mais seulement à un ensemble restreint de corps, réductibles entre eux à l'intérieur du groupe G. *Ce groupe G peut s'étendre* quand, suivant la théorie *atomique*, on se figure les corps *chimiquement réductibles* comme obtenus par divisions et recompositions (compressions et dilatations) idéales de leurs parties. Le groupe G, ainsi étendu, admet toujours l'invariant additif défini pour le groupe restreint, car le postulat formulé ci-dessus subsiste encore dans cette conception plus étendue. C'est précisément en cela que consiste la découverte de Lavoisier, dont le *principe de la conservation de la matière* peut s'énoncer ainsi :

Soient deux corps homogènes A et B, physiquement égaux, et que l'on opère sur B au moyen de transformations physico-chimiques *intérieures* ; si, après un cycle de transformations, on arrive à un corps homogène, dont les parties soient égales à celles de A, ce corps a le même volume que A.

On peut donc définir la masse, pour un système de corps physiquement réductibles, comme *un invariant additif des transformations physico-chimiques*. Cette définition correspond, dans la théorie atomique, au *nombre des particules élémentaires* des corps.

On pourrait étendre la précédente définition de la masse à tous les corps, si l'on pouvait admettre l'hypothèse de l'*unité de la matière*, qui consiste :

1° Dans la possibilité d'élargir le groupe des transformations physico-chimiques, en considérant des transformations *hyperchimiques*, par rapport auxquelles toutes les qualités de la matière seraient réductibles les unes aux autres ;

2° Dans l'extension du principe physique de Lavoisier aux transformations hyperchimiques.

La question des transformations hyperchimiques est aujourd'hui à l'ordre du jour, depuis que Ramsay a recueilli l'hélium de l'émanation du radium et interprété l'expérience comme une transformation réductrice de l'atome. Il est donc admissible que le progrès de la science conduise à attribuer une signification à la définition de la masse, basée sur l'hypothèse de l'unité de la matière, mise à part la difficulté pratique de la comparaison des masses dans cet ordre d'idées.

Abstraction faite des transformations hyperchimiques problématiques, les transformations chimiques aboutissent à des qualités matérielles irréductibles ; en langage mathématique, elles constituent un *groupe intransitif*, par rapport au système des corps. Il importe de bien voir que l'invariant additif, comporté par ce groupe, ne suffit pas à définir, d'une façon suffisamment précise, la masse d'un corps.

Considérons des éléments chimiques que nous désignerons par

$$A_1, A_2 \ldots ;$$

à chacun d'eux appartient un invariant additif

$$m_1\ m_2 \ldots ,$$

qui contient un facteur de proportionnalité déterminé arbitrairement par le choix de l'unité de mesure. Or, une expression quelconque de la forme

$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + \ldots ,$$

constitue un invariant additif pour les corps composés

$$A_1 + A_2 + \ldots,$$

par rapport au groupe des transformations physico-chimiques.

L'expression considérée contient, de plus, tous les invariants additifs possibles; la masse y figure, en tant qu'elle correspond à une détermination particulière des constantes $a_1\ a_2\ldots$; mais, précisément, cette détermination n'est pas fournie par les transformations chimiques, et, à côté de la masse, indiscernables d'elle à cet égard, d'autres invariants additifs s'introduisent, dont quelques-uns ont une signification remarquable, et entrent, pour cela, en considération dans la chimie physique, comme, par exemple, les propriétés volumétriques en rapport avec le zéro absolu, certaines propriétés optiques, calorimétriques, etc.

Il ressort de ce qui précède que l'ordre de considérations et de représentations par lequel on tente de définir la masse comme un caractère *intrinsèque* d'un corps, indépendant de l'influence des corps extérieurs sur son mouvement, n'aboutit qu'à une détermination imparfaite de ce caractère.

Néanmoins, l'analyse que nous venons d'instituer conduit à reconnaître : l'existence d'une classe de mouvements (provoqués par la force musculaire ou la pression élastique), tels qu'ils se déroulent également quand on substitue au corps mobile, considéré comme point matériel, un autre corps (point), chimiquement réductible au premier et de *masse égale;* tandis que la substitution de *masses inégales* changerait l'allure du phénomène.

Nous pouvons schématiquement considérer ces

cas, comme ceux pour lesquels *le mouvement est indépendant de l'état physico-chimique du mobile*, quitte à réduire plus tard la découverte de cette indépendance à l'exploration du champ de forces dans lequel a lieu le mouvement.

Or, si l'on admet que la classe de ces mouvements est définie directement, on peut définir comme « égales », les masses de corps chimiquement réductibles, qui peuvent être *substitués* les uns aux autres dans ces mouvements.

L'important est que *cette définition s'étende au cas de corps quelconques*, au moyen du *postulat de la masse*, dont le contenu est le suivant :

Quand le mouvement d'un point matériel A est indépendant des conditions physico-chimiques du mobile, on peut, sans changer le mouvement, remplacer le corps A par un corps formé d'une autre substance, prise dans un rapport quantitatif déterminé avec A.

En partant de ce postulat, il est possible de définir comme *égales* les *masses* des corps chimiquement irréductibles, quand on peut les substituer les uns aux autres dans les mouvements considérés. On arrive ainsi à *la définition générale de la masse*, en éliminant la part d'arbitraire qui subsistait en elle.

Le postulat de la masse affirme en substance : « l'indépendance du mouvement vis-à-vis de la qualité de la matière qui se déplace ». Mais cette indépendance est subordonnée à des conditions, dont on a tenu compte dans l'énoncé, et que l'on peut déterminer d'une façon plus distincte en partant des considérations suivantes :

Si nous nous représentons les forces qui agissent à chaque instant sur les corps en mouvement, nous pouvons admettre qu'elles dépendent de la qualité

matérielle ou de l'état physique de ces corps ; mais nous admettons que le mouvement est indépendant de la qualité de la matière, tant que celle-ci ne modifie pas les forces considérées.

Ce critère rend plus précise l'application de notre postulat de substitution. Par exemple, un point A est tiré par un fil élastique. Dans ce cas, la force ne dépend pas de la nature de A. Par conséquent, on doit admettre que le mouvement se fait de la même façon, si l'on substitue à A un autre point matériel B, en prenant la quantité de matière de B dans le rapport qui rend sa masse égale à celle de A. Le postulat signifie maintenant que les deux masses de A et B, reconnues égales dans l'expérience précédente, pourront être substituées l'une à l'autre dans n'importe quel phénomène de mouvement, sous les conditions énoncées. Quand, par exemple, un ressort exerce une pression sur A, la force ne dépend pas de la nature de A : le mouvement de A doit donc être le même que celui de B, quand ce corps, substitué à A, est soumis à la même pression du ressort.

Par contre, si A est une sphère électrisée à proximité d'une sphère analogue, il s'exerce sur A une force qui dépend de son état physique. Dans ce cas, la substitution de A par B modifie la force, et par conséquent, aussi, le mouvement correspondant.

§ 20. **Le postulat de la masse et le principe dynamique d'action et de réaction.** — Dans la précédente analyse, il s'est trouvé deux voies pour arriver, par abstraction, à une définition de la masse, suivant que l'on définit « l'égalité des masses » :

1° Ou bien, en partant de la considération des caractères du mobile, que, dans un sens relatif, nous avons considérés comme *intrinsèques*, c'est-à-dire

comme indépendants des circonstances *extérieures* qui déterminent le mouvement ;

2° Ou en cherchant, au contraire, par la considération des différentes substitutions possibles des corps en mouvement, sous différentes conditions données, à obtenir une *définition extrinsèque* de la masse.

La première voie ne conduit pas à une définition entièrement déterminée, mais elle met en lumière un fait remarquable : *un rapport entre les transformations physico-chimiques de la matière et la loi du mouvement.*

La seconde voie, à laquelle il faut recourir pour compléter la définition de la masse, conduit à reconnaître un fait général qui consiste dans l'accord des différentes substitutions possibles de masses égales dans le mouvement. On peut considérer ce fait, qui constitue le postulat de la masse, comme contenu dans l'équation du mouvement, si l'on part de la considération des forces ; mais on peut l'examiner sous un autre point de vue, en faisant abstraction des forces, et en cherchant à éliminer ce qu'il y a de surabondant dans la définition de l'égalité des masses. Il convient dans ce but :

1° De porter son attention sur un certain nombre de phénomènes de mouvement et de *définir*, à l'aide d'une expérience fondamentale, les *masses élémentaires égales ;*

2° De *postuler* la possibilité de substituer des masses égales dans tous les autres ordres de phénomènes, sous les conditions exigées.

Cette analyse conduit à relier le concept de la masse au postulat newtonien d'action et de réaction.

Pour définir « l'égalité des masses », il est naturel de comparer les corps au moyen d'expériences élémentaires dans lesquelles on les prend par couples,

en considérant un couple comme *isolé* de l'influence des corps extérieurs, quand ceux-ci sont suffisamment éloignés pour ne pas exercer d'influence sensible.

C'est cette idée qu'a précisément développée Mach, en partant du *principe newtonien d'action et de réaction*.

Nous sommes ainsi conduits à analyser la signification de ce principe. Avant tout, il convient d'observer que Newton le considère comme une simple extension du principe de symétrie (§ 15), en admettant implicitement que « les forces résultant des actions mutuelles des corps les uns sur les autres, agissent sur ces corps en mouvement, de la même façon qu'en état d'équilibre », c'est-à-dire « qu'elles agissent comme si elles *se propageaient instantanément* ». Si l'on admet cette hypothèse, qui ne participe en rien de l'évidence de la symétrie statique, le principe statique d'action et de réaction fournit le *principe dynamique* de Newton qui, en vertu de la loi du mouvement, se traduit dans « *un rapport entre* les *accélérations* des points matériels en mouvement ». C'est précisément en ce sens, indépendant de l'idée de force, que Mach considère le principe dynamique d'action et de réaction.

L'analyse de Mach, que nous complétons ici en explicitant l'hypothèse 3, conduit à exprimer les postulats contenus dans ce principe de la façon suivante :

1° Deux points matériels, constituant un couple isolé, ont des accélérations dirigées en sens opposé suivant la droite qui les joint;

2° Si deux points matériels, A et B, successivement et séparément accouplés avec un troisième point C, prennent avec C des accélérations égales et opposées, ces deux points A et B, réunis l'un à l'autre en

un couple isolé, prendront encore des accélérations égales et opposées;

3° Si l'on considère successivement les couples isolés constitués par les points matériels

$$A, C;\ B, C;\ A + B, C,$$

le rapport de l'accélération de C à celles de A et de B sera la somme des rapports des accélérations de C à A et de C à B.

En partant des postulats précédents on peut énoncer la *définition* suivante : le *rapport des masses* de deux points matériels est égal au rapport inverse des accélérations que prennent ceux-ci quand ils sont réunis en un couple isolé.

(Il convient d'ajouter que les transformations physico-chimiques à l'intérieur des corps composés peuvent bien changer les accélérations précédentes, mais non pas leur rapport.)

De cette définition résulte notamment le sens de l'expression « *masses égales* », et le postulat 2 exprime la propriété *transitive* de l'égalité. La masse est ainsi définie *par abstraction* et son *caractère additif* est contenu dans le postulat 3.

Pour ceux qui acceptent sans restriction le principe dynamique d'action et de réaction exprimé par les postulats 1, 2, 3, le postulat de la masse, pris dans un sens mécanique restreint, apparaît comme lui étant *équivalent*. Alors, le choix des observations ou des expériences servant à définir le « rapport des masses » qu'on peut obtenir en se rapportant, par exemple, à la *gravitation* (Vaschi) ou au *choc* (Andrade), etc., devient indifférent. Il faut cependant tenir compte des conditions à satisfaire pour qu'on puisse considérer un corps comme un point matériel (§ 12), et l'on doit noter qu'elles se trouvent difficilement réalisées

dans le choc, où la forme et l'orientation des corps qui s'entre-choquent influent sur le phénomène, au point de conduire à des écarts sensibles avec la loi théorique.

Observons maintenant que l'*équivalence* admise par Mach *entre le principe dynamique d'action et de réaction* (postulat 1, 2, 3) *et le postulat de la masse est relative à la systématisation de la dynamique newtonienne.*

Qu'on suppose que le principe dynamique d'action et de réaction, et en particulier le postulat 1, ne subsistent pas en général; ou, du moins, que leur validité soit restreinte, avec une approximation à évaluer, à une certaine catégorie de cas. Alors, la définition de la masse qui repose dessus, devra se rapporter à un de ces cas; mais le postulat de la masse, compris dans le sens du § 19, exprimera encore quelque chose relativement aux phénomènes de mouvement pour lesquels la condition 1 n'est pas satisfaite. *En ce sens, le postulat de la masse nous paraît exprimer plus que le principe d'action et de réaction.* De là résulte l'importance des différentes représentations qui conduisent aux deux concepts pris par Mach comme identiques.

Nous observerons, enfin, qu'indépendamment du principe dynamique général d'action et de réaction, la procédure indiquée par Mach peut encore conduire à une définition de la masse, pourvu que les expériences idéales qui servent à la définir se rapportent à des corps *en contact* ou à des points liés, quittant par la rupture de leur liaison leur position d'équilibre, et que l'on prenne *le principe dynamique d'action et de réaction dans un sens restreint*, tel qu'il se présente dans la mécanique de Hertz.

C'est ainsi que Volterra compare les accélérations

prises par deux points matériels, liés rigidement et constituant un groupe isolé, au moment de la rupture de l'équilibre, par suite de celle de leur liaison.

On peut observer que, si l'on ne veut pas exclure ici le concept de force, l'expérience idéale indiquée ramène la comparaison des masses à celle des accélérations prises par différents points matériels assujettis à des forces égales. On rejoint ainsi la loi fondamentale du mouvement qui, comme nous le verrons, fournit le fondement le plus naturel pour la comparaison des masses de corps chimiquement irréductibles, en suivant, autant qu'il est possible, le premier point de vue caractérisé au début de ce paragraphe.

§ 21. **La loi fondamentale du mouvement.** — La loi fondamentale du mouvement d'un point matériel se résume, comme nous l'avons vu, dans l'équation vectorielle

$$f = m\,\gamma$$

dont la signification est entièrement déterminée, quand sont définis le système de référence, par rapport auquel elle est valable (§ 18) et la masse m (§ 20); si, au contraire, la masse n'a pas été définie préalablement d'une manière générale, l'équation indiquée conduit, comme nous le verrons, à en compléter la définition.

Avant d'instituer une analyse des faits impliqués par la loi du mouvement, il convient tout d'abord de rappeler les circonstances historiques qui lui ont donné naissance. Elle est, comme nous l'avons vu, le fruit d'une induction par laquelle la loi du mouvement des graves de Galilée fut étendue par Newton au cas de forces variant d'une façon quelconque (cas auquel se rapportent les nombreuses études de Huyghens). La

formule de Newton est contenue dans les deux lois suivantes :

Lex I : *Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus a viribus impressis cogitur statum illum mutare.*

Lex II : *Mutationem motus esse proportionalem vi impressa, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur.*

La *Lex I* exprime le *principe d'inertie* auquel Galilée fut conduit comme cas limite dans l'étude du mouvement des graves sur le plan incliné.

On considère la *Lex II* comme exprimant, à elle seule, l'équation générale du mouvement :

$$f = m\gamma,$$

qui, dans son expression mathématique, comprend, lorsque $f = o$, la *Lex I*. C'est pour cela qu'il y a ici, pour Mach, un défaut de surabondance.

Notre point de vue est quelque peu différent. Avant tout, pour bien pénétrer l'esprit du système de Newton, nous croyons qu'il faut éliminer l'idée tout à fait récente que la loi du mouvement soit une *définition dynamique de la force*.

Pour Newton, cette loi devait exprimer une relation entre deux éléments qu'il considérait déjà comme connus : la force, d'une part, et le produit de la masse par l'accélération de l'autre. Mais comment pouvait-il considérer la force comme connue, sinon statiquement ? Si donc on admet que la force, dont il est question dans la *Lex II*, est définie statiquement, cette *lex* même comporte une signification plus restreinte que l'équation différentielle $f = m\gamma$; elle comprend, en effet, la détermination *a priori* d'une des constantes arbitraires de l'intégrale, par rapport au système de référence, et, pour rendre à la loi toute

sa généralité, dans laquelle on l'emploiera plus tard, il faut y joindre une nouvelle hypothèse que Newton a cru exprimer adéquatement par la loi d'inertie (*lex I*).

Nous interpréterons donc le texte de Newton de la façon suivante : la *lex II* se rapporte aux mouvements commençants, la *lex I* aux mouvements que ne sollicitent aucunes forces ; la loi générale du mouvement ($f = m\gamma$) résulte de la somme des deux lois newtoniennes, en prenant, d'ailleurs, pour vraie une *hypothèse non explicitée* que nous analyserons dans le paragraphe suivant.

Examinons les faits supposés par la *loi du mouvement commençant*, où l'on considère la force comme ayant été définie statiquement dans l'état d'équilibre qui précède le mouvement.

Le résultat de cette analyse se traduit dans un système de postulats et de définitions que nous allons maintenant énoncer, où nous prenons la masse comme un invariant additif des transformations physico-chimiques, et qui, pour cela, est définie seulement par la comparaison des corps chimiquement homogènes :

Postulat I. — Si une force agit sur un point matériel en repos, celui-ci, s'il n'est retenu par rien, commence à se mouvoir dans la direction de la force.

Postulat II. — L'accélération imprimée à un point donné est proportionnelle à la mesure statique de la force.

Postulat III. — Des forces égales impriment à des corps matériels, chimiquement homogènes, de masses égales, des accélérations égales.

Postulat IV. — Si deux forces f_1, f_2, s'exerçant séparément sur deux points matériels M_1, M_2, leur

communiquent la même accélération γ; une force égale à la somme de $f_1 + f_2$, s'exerçant sur le point $M_1 + M_2$, obtenu par la réunion des deux points donnés, lui communiquera encore la même accélération γ.

En parlant de ces postulats, on peut énoncer la *définition* suivante : les *masses* de deux points matériels hétérogènes sont dites *égales*, si des forces égales, s'exerçant sur eux, leur communiquent des accélérations égales.

Ce que cette définition contient de surabondant est une conséquence du postulat II : si deux forces égales à f, impriment aux points matériels M_1, M_2 la même accélération γ, des forces égales à $2f$, leur imprimeront une même accélération 2γ, etc.

En outre, le concept de la masse, qui est ainsi défini, satisfait aux desiderata que nous avons déjà analysés, le caractère additif de la masse étant contenu dans le postulat IV.

Pour compléter les précédents postulats, il faut joindre au postulat II le *principe de Galilée*, que nous verrons dans la suite généralisé par d'Alembert dans la dynamique des systèmes (§ 27). Nous l'énoncerons ainsi :

Postulat V. — Plusieurs forces appliquées à un point matériel produisent la même accélération (résultante des accélérations partielles) que leur résultante statique.

Il est essentiel de remarquer que : *les postulats I-V, qui expriment la loi fondamentale du mouvement commençant, sont valables pour n'importe quel système de référence* auquel on rapporte les forces et le mouvement, même s'il s'agit d'axes de référence dont les directions varient, par rapport aux directions astronomiquement fixes.

En effet, soit α un système d'axes ayant des directions astronomiquement fixes, β un système variable de n'importe quelle façon par rapport à α, P un point en équilibre par rapport à β, qui, à un moment donné, commence à se mouvoir par rapport à β. La loi du mouvement commençant affirme que, si l'on rapporte à β la force agissant sur P, aussi bien que le mouvement du point lui-même, la force (dans le sens vectoriel) est proportionnelle à l'accélération. Cet énoncé se convertit dans le suivant : la force relative à β est proportionnelle à la variation de l'accélération évaluée par rapport à α.

Il en résulte, selon le théorème de Coriolis, que la loi est indépendante des systèmes de référence.

C'est précisément, par suite de cette indépendance, que Reech et Andrade ont eu l'idée de remplacer l'expression classique de la loi du mouvement par la proportionnalité de la force à la variation de l'accélération.

Entre leur formule et la nôtre subsistent deux différences :

1° La première est que nous nous restreignons au cas du mouvement commençant, seul cas où l'on puisse à proprement parler de forces définies statiquement ;

2° La seconde est que nous prenons le concept de force comme *relatif* au même système auquel se rapporte le mouvement commençant, si bien que nous n'avons pas à changer l'expression classique de la loi.

La première restriction est particulièrement essentielle pour ce que nous nous proposons de mettre en évidence : une hypothèse tacite qui intervient dans l'extension progressive de la loi du mouvement.

§ 22. **Principe d'inertie généralisé.** — Nous avons

remarqué que la loi générale du mouvement est obtenue en complétant la loi du mouvement commençant (*lex II* de Newton) par celle de l'inertie (*lex I*), moyennant l'adjonction d'une hypothèse non explicitée. En effet, le passage du cas particulier du mouvement commençant au cas général, au moyen du principe de la résultante, exige que la force agissant sur un point en mouvement puisse être évaluée comme si le point était instantanément arrêté.

Cette hypothèse des *forces de position* se présente très naturellement à Newton, parce que sa dynamique (bien qu'ayant une allure généralement transcendante) est, en somme, l'extension aux phénomènes célestes de la dynamique terrestre de Galilée.

C'est précisément cette extension qui explique à nos yeux la façon dont Newton est arrivé à l'énoncé général de ses principes et à la forme qu'il leur a donnée.

Or, si nous voulons postuler explicitement ce qu'il faut ajouter à la loi du mouvement commençant, à la place de la *lex I*, nous énoncerons le *principe* suivant *d'inertie généralisé* :

A chaque instant, le mouvement d'un point matériel se fait, comme s'il avait été mis en mouvement, à partir d'un état de repos pourvu que :

1° Les positions respectives des corps extérieurs qui influent sensiblement sur le phénomène ne subissent, du fait de cette hypothèse, aucun changement ;

2° Qu'à la force agissante sur le point, qui se mesure statiquement quand il est en repos, s'ajoute une impulsion égale à la vitesse du mouvement.

Il est à peine nécessaire de relever comment cette loi postule un fait vérifiable avec une approximation suffisante, toutes les fois que l'hypothèse se trouve

suffisamment vérifiée. La dynamique peut aussi *corriger* l'application du principe en tenant compte, par exemple, de la *résistance du milieu* dans lequel un corps donné est en mouvement. Il s'agit, dans ce cas, de considérer le mouvement du milieu, ou tout au moins d'en tirer l'introduction d'une force nouvelle, due, par exemple, à la compression du fluide ou à son inertie, etc., et qui dépende de la vitesse du mobile donné.

En ce sens, il s'introduit dans les équations de la dynamique classique des *forces dépendantes de la vitesse*, pour remplacer, dans le mouvement d'un système partiel, ce qui provient d'un système plus étendu, où les points matériels se meuvent seulement sous l'action des forces de position.

Il reste à éclaircir deux points :

1° Le rapport d'inertie ordinaire (*lex I*) avec le principe d'inertie généralisé ;

2° Le rapport de celui-ci avec le principe dynamique newtonien d'action et de réaction.

I. — La loi d'inertie ordinaire est un cas particulier de notre principe, que l'on obtient quand on suppose donné un champ de *forces nulles*. Notre principe équivaut à la réunion de cette loi d'inertie particulière avec l'hypothèse des forces de position.

Nous observerons encore que, dans la loi d'inertie particulière, il y a deux suppositions à distinguer : la conservation de la direction du mouvement et la conservation de la vitesse.

La première est conforme à l'intuition géométrique du mouvement, si l'on envisage les forces comme des « effets des corps », puisqu'un point, que ne sollicitent aucunes forces, nous apparaît comme soustrait à l'influence de tous les changements possibles des corps (éloignés), de sorte que la trajectoire de son

mouvement doit être une ligne « qui ne changerait pas si l'on faisait tourner l'univers astronomique autour d'un de ses éléments », c'est-à-dire une droite.

La conservation de la vitesse est un principe paradoxal en regard des expériences familières, et se présente comme une induction abstraite, acquise par Galilée, ainsi que nous l'avons vu, dans un cas particulier, et auquel conduit par continuité l'hypothèse des forces de position jointe à loi du mouvement.

II. — Le rapport entre le principe dynamique d'action et de réaction et le principe d'inertie généralisé s'énonce ainsi :

Le principe dynamique d'action et de réaction, pris comme rapport général entre les accélérations des points matériels en mouvement, est une conséquence du principe de symétrie statique joint au postulat d'inertie généralisé, pourvu que l'on considère les forces comme des « actions entre les corps ».

Le principe dynamique d'action et de réaction au sens restreint de Hertz résulte déjà de la combinaison de la loi du mouvement commençant avec le principe de symétrie statique.

§ 23. **L'appréciation synthétique des principes.** — L'analyse des concepts et des postulats de la mécanique du point nous a conduit à énoncer les hypothèses implicites et explicites de cette science, qu'on peut disposer dans l'ordre suivant :

1° Postulats de l'espace (Liv. I) et du temps (§§ 3-8).

2° Postulats de la statique : principes de symétrie et principe de la résultante (§§ 15, 16).

3° Principe de la conservation de la matière (§ 19).

4° Loi du mouvement commençant (post. 1-5, § 21).

5° Hypothèses sur lesquelles repose la construction des directions astronomiquement fixes (§ 18).

6° Principe d'inertie généralisé (§ 22).

Les postulats 2 et 4 sont valables pour l'équilibre et pour les mouvements relatifs à un système de référence quelconque. C'est seulement le postulat 6 qui exige que la direction des axes de référence soit astronomiquement fixe.

En tenant compte de cela, du mode d'acquisition des postulats, de leur rapport de subordination, etc., il apparaîtra naturel d'établir une *hiérarchie de principes* :

a) Les postulats 1 et 2, reposant directement sur l'intuition et contrôlés par diverses expériences immédiates, peuvent être considérés comme les suppositions les plus générales et les plus sûres de la mécanique.

b) Sur cette base statique et cinématique reposent les postulats 3 et 4, non plus aussi évidents pour l'intuition, mais démontrés par des expériences directes.

c) Le postulat 6, lié jusqu'à un certain point à l'hypothèse 5 et le principe newtonien d'action et de réaction qui en dérive viennent en troisième lieu, comme des hypothèses, non plus prouvées par des expériences directes (conscientes ou inconscientes), mais suggérées par induction de l'étude des phénomènes de gravitation sur la terre et dans le ciel, dont ils reçoivent une confirmation indirecte, subordonnée à l'admission des postulats précédents.

Nous énoncerons les conclusions précédentes sous une forme plus suggestive en disant :

Les postulats 1-5 définissent une mécanique plus générale, valable pour n'importe quel système de référence, qui comprend l'équilibre et le mouvement com-

mençant. Pour que la dynamique conduise à des prévisions déterminées, il faut adjoindre à ce système une hypothèse, qui, dans la mécanique céleste, est exprimée convenablement par le postulat d'inertie généralisé. On pourrait modifier cette hypothèse, en prenant à sa place quelque loi plus compliquée, comme nous serons conduits à le faire dans la suite; en tout cas, le principe d'inertie généralisé exprimerait cette loi avec une approximation d'autant plus élevée que seraient plus petites les vitesses considérées, c'est-à-dire dans les cas relativement les plus proches du mouvement commençant, comme pour le système planétaire. Des difficultés pourraient seulement surgir de la considération de vitesses considérablement plus élevées.

CHAPITRE IV

LA STATIQUE ET LA DYNAMIQUE DES SYSTÈMES

§ 24. **Statique des systèmes : liaisons.** — Nous avons envisagé jusqu'ici la dynamique du point matériel; mais dans la réalité on doit, en beaucoup de cas, considérer des corps doués de dimensions qui ne sont pas négligeables, et dont on ne saurait faire abstraction dans la définition même de « la force qui agit sur un point ».

La forme, la grandeur, et, en général, les caractères géométriques des corps en équilibre ou en mouvement sont étroitement liés à certains éléments sensibles qu'on désigne sous le nom de *nature* du corps, non moins qu'aux forces qui agissent sur lui.

On peut se figurer un corps comme formé de points matériels entre lesquels s'exercent certaines actions ou *forces intérieures*, et ramener la notion de corps à celle d'un « système de points et de forces ». Le problème de l'équilibre et du mouvement se trouve ainsi ramené aux principes de la mécanique du point. Mais les forces dont il s'agit constituent en réalité une hypothèse qui le plus souvent n'admet aucune vérification.

Il est, par contre, facile de reconnaître que, dans beaucoup de cas familiers, certaines propriétés géométriques, indépendantes des forces exercées, se

maintiennent constantes (ou varient dans un certain rapport avec elles); on peut alors rendre compte de cette observation en admettant d'hypothétiques liaisons entre les points du corps, que l'on considère par suite comme « un système lié par des conditions géométriques ». On doit considérer cette hypothèse simplement comme la simplification idéale d'un fait prouvé *a posteriori*, par exemple du fait que les distances mutuelles des points d'un corps solide restent, entre certaines limites, approximativement invariables.

Si l'on veut substituer au concept des liaisons celui, mentionné plus haut, d'un système de forces intérieures, ou si, au contraire, comme nous le ferons dans la suite, on veut considérer toutes les forces comme des réactions de liaisons, la considération simultanée des forces et des liaisons impose à notre représentation des conditions surabondantes. Mais elle équivaut à dire, dans ce cas, que certains *résultats* (par exemple certaines liaisons) sont pris à la place de certaines *données* inconnues (forces intérieures), dans la détermination du phénomène.

En renvoyant au livre III les questions relatives à la réduction de ces concepts primitifs, nous considérerons dans la suite les forces et les liaisons comme des éléments qui ont une signification positive par rapport à l'expérience, et qui permettent de traiter des phénomènes visibles sans recourir à la représentation d'un monde invisible. Nous aurons, pourtant, l'occasion de relever, en plusieurs points, la nécessité d'admettre entre ces deux concepts, certains rapports qui, en fait, se rattachent à des représentations de ce genre.

§ 25. **Levier et plan incliné : principe des moments statiques.** — On peut dire, notamment, que

la notion de liaison intervient implicitement dès le début de la statique. En effet, l'équilibre de certains systèmes, comme le *levier* et le *plan incliné*, a occupé Archimède et Stévin, avant qu'ils eussent été conduits à considérer la composition des forces appliquées en un point.

L'histoire de la formation de la statique nous montre le chemin parcouru par ceux qui ont découvert les principes fondamentaux de l'équilibre, principes qui se rattachent aux notions de *moments statiques* et de *travaux virtuels*.

L'égalité des moments statiques, comme condition de l'équilibre du levier, a été découverte par Archimède qui voulait la déduire de postulats relatifs à des cas élémentaires de symétrie et de dyssymétrie, c'est-à-dire « d'équilibres obtenus par des poids égaux, suspendus à des bras égaux, et de déséquilibres obtenus par des poids inégaux suspendus à bras égaux, ou *vice versa* ».

Mach relève dans la démonstration d'Archimède une erreur nécessaire : celui-ci fait un emploi tacite de l'hypothèse que, « sans changer l'équilibre, un poids suspendu à un bras de levier peut être divisé en deux poids égaux symétriquement éloignés du point d'application » ou que « l'on peut remplacer des forces égales et parallèles appliquées perpendiculairement à une tige rigide, par une résultante appliquée au centre de la tige, parallèle aux composantes et égale à leur somme ».

Il reste néanmoins à juger si l'hypothèse implicitement postulée par Archimède, par suite de son évidence intuitive ou des conditions dans lesquelles on peut la vérifier expérimentalement, ne représente pas quelque chose de plus plausible que le théorème : « l'équilibre du levier correspond à l'égalité des mo-

ments statiques. » Or, à cet égard, nous ne pouvons partager le jugement péjoratif de Mach. Il nous paraît indubitable que la démonstration d'Archimède reste véritablement instructive. Elle l'est d'autant plus, à notre point de vue, que l'on tient compte des développements qui se rapportent à la *composition des forces parallèles* agissant sur les points d'un système rigide, développements qui procèdent dans un sens analogue à ceux du § 16.

Une étude de Foncenex, corrigée dans la suite par d'Alembert et Laplace, permet, en effet, de déduire une loi de composition des forces parallèles dirigées dans le même sens, qui est déterminée complètement, à une constante K près, en partant des hypothèses suivantes :

1° Existence d'une résultante unique ;

2° Propriété associative de la composition des forces ;

3° Principe de symétrie.

La loi ordinaire : « la résultante de deux forces parallèles et de même direction est égale à la *somme* des composantes », est comprise dans la loi précédente plus générale et s'obtient quand on pose $K = \infty$.

Or, Génocchi a montré qu'en partant du postulat d'Euclide sur les parallèles, on obtient précisément $K = \infty$. Les postulats statiques qu'il emploie dans son raisonnement sont les suivants :

4° La possibilité de transporter une force le long de sa ligne d'action ;

5° Le principe de la composition des forces concourantes en un point,

qui est d'ailleurs pris, ici, dans un sens plus général, puisqu'il s'agit de remplacer par la résultante (relativement aux effets de l'équilibre) non plus des forces

agissant sur un point matériel libre, mais des forces agissant sur un point matériel qui fait partie d'un système solide.

Grâce à ces développements, on en vient à l'idée que la condition de l'équilibre du levier, exprimée par le principe des moments statiques, en dehors de la vérification directe fournie par des expériences quantitatives, peut être encore vérifiée indirectement par des expériences en quelque sorte qualitatives qui se rattachent à une représentation synthétique des phénomènes.

Pour d'autres systèmes simples, on peut obtenir, dans un sens analogue, une démonstration des moments statiques comme condition de l'équilibre. Citons, par exemple, la condition de l'équilibre d'un grave sur le plan incliné, déduite par Stévin du postulat de « l'équilibre d'une chaîne fermée et homogène développée sur un triangle » ; procédé d'autant plus suggestif que Mach aussi le juge favorablement.

§ 26. **Le principe des travaux virtuels.** — Le principe de l'équilibre, basé sur la comparaison des moments statiques, constitue le fondement de la statique des systèmes à un état de développement antérieur aux connaissances dynamiques, et dans lequel les premières expériences élémentaires explicites se rattachent immédiatement à l'intuition de l'équilibre, indépendamment de la considération des mouvements possibles.

Une phase de développement ultérieur est marquée par l'emploi des considérations dynamiques, et notamment, par la comparaison des *travaux virtuels*, c'est-à-dire des travaux exécutés par un système suivant de petits déplacements, théoriquement infinitésimaux, conciliables avec les liaisons.

Une première observation de Stévin sur l'équilibre des poulies et une observation plus générale de Galilée sur le plan incliné, reprise par Torricelli, ont conduit au principe de l'équilibre, reconnu dans sa signification la plus étendue par Johann Bernoulli (1717), et pris ensuite par Lagrange comme fondement de sa *Mécanique analytique*.

Le principe des travaux ou des vitesses virtuelles s'énonce ainsi : la condition nécessaire et suffisante pour l'équilibre d'un système lié, soumis à des forces quelconques, est que les travaux exécutés par les forces, suivant un déplacement virtuel du système, soient nuls.

Ce principe exprime une hypothèse très générale, qui *se rapporte à la nature des liaisons* d'un système, et doit être considérée (conformément au point de vue historique) comme une acquisition obtenue inductivement par une extension progressive du concept même de « liaison ».

La démonstration classique qu'on a l'habitude d'en donner aujourd'hui montre bien que sa validité, pour toutes les machines usuelles en général, dépend d'une analyse des différentes espèces de liaisons qui leur sont appliquées. La démonstration consiste à constater que le principe subsiste pour les cas élémentaires : point libre, point mobile sur une surface, points liés, surfaces qui roulent l'une sur l'autre, etc.; une telle constatation se fait par une comparaison directe des expériences relatives à ces cas ou par la comparaison de la condition d'équilibre exprimée par l'annulation des travaux virtuels avec d'autres conditions particulières d'équilibre qu'on suppose connues par des expériences antérieures, conscientes ou inconscientes, réévoquées dans une vision imaginative des phénomènes.

Il apparaît donc que le principe des travaux virtuels rattache à une hypothèse générale un ensemble de faits, en partie représentés comme évidents, et tire de leur ensemble d'autres faits qui tombent sous le contrôle d'expériences variées.

Il importe d'insister sur ce point : la validité du principe des travaux virtuels, en tant qu'elle est présumée déduite des postulats statiques et de certaines conditions élémentaires d'équilibre des machines les plus simples, est limitée par la nature des liaisons. Mais rien n'empêche un développement inductif du principe qui conduise à l'appliquer à des cas irréductibles aux types considérés. Par là, on *étend* vraiment la portée de la *supposition* contenue dans le principe, et on laisse aux conséquences qu'on en déduit le soin d'en légitimer la plus large application. Un exemple remarquable d'une telle extension est fourni quand on prend pour liaison l'invariabilité des distances dans un sens infinitésimal; c'est précisément le cas des problèmes d'équilibre des *fils* et des *surfaces flexibles et inextensibles*. Un second exemple nous est donné par le problème de l'*équilibre hydrostatique*, si l'on prend comme liaison l'*invariabilité du volume*, etc.

Le principe des travaux virtuels s'étend dans un autre sens, quand on traite des cas où l'on ne prend pas les *forces* comme véritablement *données*, mais où, laissant de côté toute hypothèse sur celles-ci, on évalue directement les *travaux* qui entrent en jeu, par exemple dans la théorie de l'*élasticité*. On se rapproche ainsi du développement de la mécanique classique qui trouve son expression concrète dans la construction de l'Energétique.

Il reste encore une double remarque à faire.

La première est que le postulat de l'équilibre, exprimé par l'annulation des travaux virtuels, se rap-

porte toujours à des cas dans lesquels les liaisons sont des relations géométriques exprimables par des *équations*. Si l'on considère plus généralement des liaisons exprimées par des *inégalités* (liaisons *unilatérales*), le principe lui-même doit être transformé en une inégalité.

La seconde est que le principe des travaux virtuels, comme en général la mécanique, se rapporte au cas limite dans lequel on *fait abstraction des frottements*. On doit cependant mentionner la récente tentative d'Almansi de traiter le frottement comme un cas de forces assujetties à des liaisons (en partie unilatérales) : il semble devoir en résulter une généralisation très intéressante.

§ 27. **La dynamique des systèmes : principe de d'Alembert.** — Une observation d'Huyghens à propos de l'étude des mouvements oscillatoires, reprise sous d'autres formes par Giacomo et Giovanni Bernoulli, a été élevée par d'Alembert (1743) au rang de principe.

Un système de forces U, agissant sur un corps constitué par des points liés, peut être remplacé par rapport aux effets de mouvement par un système de forces V, appliquées aux éléments du corps (points) et égales au produit de leur masse par les accélérations communiquées par les U. *Les équations du mouvement* du corps sont alors exprimées par les conditions d'équivalence statique des systèmes de forces U et V, c'est-à-dire par les *conditions d'équilibre* du système des *forces perdues* U-V.

Nous avons déjà observé (§§ 16-21) que ce principe contient une supposition de fait dans le cas du point matériel. Il importe, maintenant, d'observer que le *principe général de d'Alembert* est une *conséquence du*

postulat de Galilée relatif à la dynamique du point, si l'on accepte quelques *hypothèses implicites* qui se rattachent au concept de liaison. En effet, la démonstration du principe général de d'Alembert se fait en admettant que :

1° Les liaisons peuvent être remplacées à chaque instant par des forces (*réactions*) agissant sur les points du système et dépendant des forces appliquées ;

2° La résultante dynamique des forces qui agissent sur chaque point équivaut, à chaque instant, à leur résultante statique (postulat de Galilée) ;

3° En appliquant simultanément à tous les points du système des forces égales et contraires aux résultantes des liaisons (et des forces données), leurs réactions ne sont pas changées.

L'hypothèse 3 traduit, notamment, une représentation des liaisons et de leurs réactions, où on les envisage comme s'opposant à des changements de distances ou à certains mouvements des points du système, qui demeurent par suite invariables quand ces circonstances déterminantes persistent.

Le principe de d'Alembert, uni à celui des travaux virtuels, a permis à Lagrange de mettre en équations le problème du mouvement d'un système lié, toutes les fois que les liaisons sont exprimées par des équations et sont réduites, en dernière analyse, aux types élémentaires considérés.

Les *équations du mouvement* d'un système expriment, sous une forme mathématique précise, que « le mouvement est déterminé par la connaissance des forces appliquées, des liaisons, des positions et des vitesses initiales des points du système à un instant donné ». Ces équations renferment, comme cas particuliers, les conditions d'équilibre.

Dans le développement déductif de la mécanique analytique, on a reconnu l'utilité de transformer le principe de d'Alembert, ou mieux le théorème que l'on obtient grâce à lui en se servant du principe des travaux virtuels, en d'autres formes *équivalentes* susceptibles souvent d'une application plus rapide. Le *principe du moindre effort* de Gauss et le *principe d'Hamilton* sont justement des transformations du théorème de d'Alembert-Lagrange ; mais en ce qui concerne le premier principe, il est à observer qu'il a pour Gauss une signification plus générale, comme comprenant aussi le cas des liaisons unilatérales.

§ 28. **Principe des forces vives et de la moindre action.** — Considérons expressément le cas des systèmes auxquels s'applique le théorème de d'Alembert-Lagrange. Puisque ce théorème conduit aux équations du mouvement, la détermination du mouvement même en résulte, dès que l'on s'est donné les forces, les liaisons, les positions et les vitesses initiales des points du système, à n'importe quel instant. Il en résulte que si un autre principe détermine le mouvement de pareils systèmes :

1° Ou il sera une conséquence logique du théorème de d'Alembert-Lagrange ;

2° Ou il impliquera une condition restrictive quelconque des données (forces et liaisons).

Le principe de Gauss, qui s'étend même à une classe plus générale de phénomènes, et le principe de Hamilton offrent des exemples du premier cas.

L'intérêt qui s'attache à la recherche de principes plus restrictifs, correspondant au second cas, vient de l'idée que « les *forces* et les *liaisons* ne sont pas des éléments *arbitraires* du phénomène dynamique », et,

notamment, que leurs relations réciproques sont soumises à une restriction dont la connaissance est exigée pour pousser plus avant la prévision concrète des faits.

Si, par exemple, on convient de généraliser le concept astronomique de force introduit par Newton, « comme action des points matériels s'exerçant suivant le principe dynamique d'action et de réaction » (*forces centrales*), et si l'on réduit les liaisons aux cas qui peuvent résulter de ces forces (Liv. IV), on en vient précisément à introduire une condition restrictive qui permet de déduire du théorème de d'Alembert-Lagrange un principe plus compréhensible. En fait, l'hypothèse des forces centrales conduit à établir un résultat d'une très grande importance physique : le *principe des forces vives*, dont résulte une détermination plus simple du mouvement. Résumons-en l'historique.

Huyghens, dans son étude des mouvements pendulaires, fut le premier à remarquer que « la variation de la somme des forces vives des points d'un système en mouvement est égale et opposée à celle des travaux exécutés par ces forces ». Ce théorème s'étend au cas général auquel s'appliquent les équations de Lagrange. Il y a plus. On peut souvent évaluer la variation de la force vive ou du travail sans connaître les trajectoires décrites par le mouvement, parce qu'elle dépend seulement de l'*état initial et final* du système. L'origine de cette observation se trouve chez Galilée. Il remarqua que l'accroissement de force vive d'un grave qui tombe dépend seulement de la hauteur verticale de la chute ; Huyghens et Euler donnèrent à l'observation de Galilée une signification plus étendue. Finalement, Daniel Bernoulli reconnut que cette observation a une valeur générale dans l'hypo-

thèse des forces centrales. En effet, dans ce cas, les forces admettent un *potentiel* qui dépend seulement de l'état du système et « la variation de la force vive du système en mouvement se mesure à chaque instant par celle du potentiel ». C'est précisément le principe des forces vives qui (comme nous le verrons au livre III) prélude à celui de *la conservation de l'énergie*.

Pour les systèmes soumis à des forces qui admettent un potentiel, le principe des forces vives permet de réduire ceux de Gauss et de Hamilton à une expression plus simple qui constitue le *principe de la moindre action*.

Le mouvement se fait de façon que la variation de la valeur moyenne de la force vive du système, pour chaque intervalle de temps, devienne minima. Ce principe précède historiquement celui de Gauss; il fut énoncé d'abord sous une forme un peu vague par Maupertuis et précisé ensuite par Euler; Lagrange remarqua son lien avec celui de Gauss.

§ 29. **La vérification de la dynamique.** — Il résulte des précédents paragraphes qu'un développement psychologique des données empiriques a réussi à poursuivre la série des associations et des abstractions représentées dans les concepts d'espace et de temps, par la construction d'une statique, puis d'une dynamique qui comprend la statique comme cas particulier. Ce développement psychologique peut s'envisager comme une série d'inductions, procédant, en partie, d'expériences inconscientes, en partie d'expériences conscientes coordonnées aux premières, de façon à étendre la vision imaginative ou intuitive des faits.

La variété de ces expériences, leur intime attache à un système général d'hypothèses, grâce auxquelles

on peut les accorder et les contrôler les unes avec les autres, constituent déjà une vérification préventive de ces hypothèses et offre ainsi une garantie de leur validité dans un ordre d'approximation très élevé, bien qu'il soit légitime de classer les principes, à cet égard, dans un ordre hiérarchique (§ 23).

Pour une évaluation plus précise et plus certaine de la dynamique, il est nécessaire de soumettre à une vérification les conséquences qui s'en déduisent.

Le théorème de d'Alembert-Lagrange, qui résume l'ensemble des hypothèses de la dynamique, exprime un rapport général entre certaines données empiriques : le mouvement d'un corps, les forces agissant sur ses points (c'est-à-dire le champ de forces à l'intérieur duquel le corps se meut), la distribution des masses (densité) du corps et les liaisons entre ses points. Les principes de la mécanique, en particulier ceux de la mécanique du point, peuvent s'envisager comme des déterminations particulières de ce rapport qui correspondent à des conditions hypothétiquement simples; et ainsi la déduction du théorème de d'Alembert-Lagrange de ces principes équivaut à dire que le phénomène dynamique est expliqué dans son entière complexité comme superposition d'un certain nombre de phénomènes élémentaires.

Or, la vérification de la dynamique exige que l'on recoure à une série de cas concrets, dans lesquels on peut déterminer par l'expérience les faits supposés donnés (mouvements, forces, etc.) avec une certaine approximation. Il faut, par suite, en particulier :

1° Qu'on ait un champ de forces connu, par exemple un champ de forces constant, comme celui de la pesanteur de la terre, etc.;

2° Qu'on puisse évaluer la masse du corps en mouvement et sa distribution (densité);

3° Qu'on puisse déterminer avec une précision suffisante les liaisons entre les points du corps, ce qui arrive surtout dans le cas des *corps solides*.

Ces conditions sont bien remplies dans deux cas, qui appartiennent précisément aux phénomènes de l'étude desquels est sortie la dynamique.

A. — Dans le mouvement des corps libres à la surface de la terre (chute des graves, lancement des projectiles, etc.), où l'on rencontre pourtant la difficulté de tenir compte de la *résistance de l'air*, dont l'évaluation précise conduit à compléter le système en mouvement par l'adjonction du fluide ambiant, c'est-à-dire par la substitution d'un système soumis à des liaisons plus difficilement déterminables.

B. — Dans les mouvements du système planétaire. Ici, on peut considérer le système complet comme constitué uniquement de corps solides, et, bien qu'on ignore le mode de variabilité de la densité, il est permis de faire abstraction de cette circonstance en considérant les corps soit comme des points, soit comme des sphères ou des ellipsoïdes homogènes, soit comme des corps dont la densité augmente avec une certaine uniformité vers le centre. Dans les principaux problèmes de l'astronomie de position, l'erreur que comportent de pareilles hypothèses est négligeable, et, ainsi, il suffit d'évaluer dans leur ensemble les masses et les forces qui s'y appliquent.

Ces déterminations sont en partie liées ensemble, et dépendent de la généralisation hypothétique de certaines expériences, par exemple de celles de Cavendish, de Carlini et d'Airy : de la constatation des forces produites par les marées, comparées avec certaines observations astronomiques, on conclut de la façon la plus directe aux attractions planétaires ; de l'expérience sur le pendule de Bessel, comparée avec

les observations astronomiques, on conclut que la masse est proportionnelle à l'attraction qu'elle exerce, etc. Toutefois, il faut remarquer que le degré d'exactitude de ces expériences terrestres apparait généralement inférieur à celui des observations astronomiques, dont on tire précisément, au moyen d'une comparaison convenable, une correction de la valeur des masses.

Par conséquent, la vérification de la dynamique, telle qu'elle est instituée par les astronomes, reste subordonnée à l'admission d'hypothèses sur les forces et sur les masses qui sont, à leur tour, directement vérifiées par la comparaison des observations astronomiques avec certaines expériences terrestres comportant un moindre degré d'approximation.

Une vérification plus précise de la dynamique nous est fournie par l'astronomie planétaire. On peut, en effet, déterminer les masses et les forces avec une plus grande exactitude, de façon à représenter dans leur ensemble les observations astronomiques, et à établir des prévisions qui se trouvent confirmées avec une très grande précision : avec un écart angulaire de 15″ ou une seconde de temps pour le mouvement de la lune en deux siècles et demi, avec un écart maximum de 8″ ou une demi-seconde de temps pour le mouvement de Mercure en un siècle (un déplacement de 41″ du périhélie); pour les autres planètes, l'écart indiqué reste inférieur à 2″, bien qu'il conduise à des différences appréciables pour le nœud de Vénus et le périhélie de Mars.

En présence d'un tel résultat, le premier sentiment est celui d'une admiration profonde qui entraîne l'esprit à l'exaltation de la science. Mais quiconque possède une confiance illimitée dans ses progrès tirera du succès obtenu un encouragement nouveau

pour la recherche d'une connaissance plus précise encore.

En effet, les écarts indiqués, bien que pratiquement très petits, sont appréciables pour nos instruments délicats, et dépassent les limites des erreurs possibles dans l'application de la loi newtonienne. Ils exigent une *explication* qui en rende un compte exact; et l'on est amené ainsi à choisir entre différentes hypothèses possibles :

1° Ou bien corriger l'écart observé, en étendant les observations astronomiques (en découvrant, par exemple, l'existence de nouvelles masses interplanétaires ou la non sphéricité du soleil) ;

2° Ou bien modifier la loi de l'attraction universelle, tout en conservant la dynamique de Newton dans son intégralité, et supposer une force attractive $f(r)$, fonction de la distance r, mais non plus rigoureusement proportionnelle à l'inverse de son carré. C'est dans ce sens que Hall a proposé de remplacer l'exposant 2 par l'exposant 2,000.000.151;

3° Ou modifier enfin les hypothèses contenues dans la dynamique newtonienne, ou tout au moins une partie de celles-ci, par exemple la propagation instantanée de l'attraction, et, par suite, le principe d'inertie généralisé.

Etant donné qu'il s'agit d'un ordre d'approximation très élevé, il est difficile de dire si, conformément à l'hypothèse 2, on ne pourrait pas trouver une détermination de la fonction $f(r)$ qui réduise les écarts à des limites négligeables ; mais une telle hypothèse serait bien peu satisfaisante pour l'esprit, si nulle représentation ne vient l'étayer, et elle est propre à diminuer un peu notre confiance dans la dynamique.

L'idée de corriger l'hypothèse de l'attraction, en admettant un temps fini de propagation, s'est présentée à Laplace. Mais il n'a pas considéré cette correction comme liée aux principes de la dynamique, et entraînant vraisemblablement, de ce fait, une correction de ces principes mêmes. Aussi ses calculs, repris par Léhman Filhès (1884), ont conduit à une vitesse de propagation plusieurs millions de fois plus grande que celle de la lumière ; et il semble impossible de distinguer une telle vitesse d'une propagation instantanée.

Laissons-en à ce point la vérification astronomique de la dynamique. Le degré d'approximation atteint est déjà merveilleux et semble difficilement surpassable dans ce champ d'observation. Nous y reviendrons après une comparaison d'expériences plus étendues (Cf. Liv. III).

En dehors des deux cas principaux que nous venons d'examiner, il convient de considérer les vérifications qu'apportent à la dynamique d'autres catégories de phénomènes plus complexes, et, en particulier, dans quelle mesure on peut tirer une vérification du fonctionnement des machines.

Tout le monde sait qu'ici les prévisions de la théorie exigent de multiples corrections. Les forces, les masses, les liaisons et les mouvements, qui nous apparaissent comme la partie *visible* du phénomène, ne suffisent plus à le déterminer. Il faut considérer, en outre des *éléments perturbateurs*, en premier lieu, le *frottement*, auquel se rattachent les phénomènes d'*échauffement*, d'*électrisation*, etc. On est obligé, par suite, de reconnaître qu'ici la dynamique représente une connaissance grossièrement approximative, et que les circonstances précédentes exercent une influence *systématique*, qu'on ne peut négliger, pas même dans une théorie *statistique*.

Cependant ce jugement se modifiera dans le sens

d'une vérification plus précise de la dynamique, si on réussit à *étendre l'ensemble des données visibles*, en tenant compte, par exemple, des mouvements vibratoires mis en évidence par le son.

Cette extension est théoriquement illimitée, si l'on convient de dépasser, au moyen d'hypothèses, le champ de l'expérience. A côté de la partie visible des phénomènes, on sera conduit à construire un monde hypothétique *invisible*, qui, en s'écartant toujours davantage de celui qui tombe sous nos sens, prendra la valeur d'un *intermédiaire fictif entre les objets réels*. Une telle extension pourra conduire à une nouvelle vérification de la dynamique, si la correspondance établie entre ces entités fictives et la réalité physique conduit à une connaissance adéquate des différents rapports des phénomènes, et, en particulier, à une correction satisfaisante des prévisions sur le mouvement.

Mais une telle vérification sera de toute façon subordonnée à l'introduction d'hypothèses auxiliaires sur lesquelles repose la possibilité d'évaluer les forces. Nous examinerons au livre III quelle valeur il convient de leur attribuer.

Bornons notre critique, pour l'heure, à l'observation suivante : dans une interprétation étendue de la dynamique, seules certaines combinaisons de ses données élémentaires prendront, par définition, la valeur d'objets réels, et la vérification expérimentale portera directement sur les rapports de ces objets, c'est-à-dire sur certains théorèmes déduits des principes hypothétiques et, selon toutes présomptions, non équivalents aux prémisses. De là viendra l'idée toute naturelle de prendre les théorèmes à la place des principes, comme hypothèses fondamentales d'une théorie généralisée. De cette façon, l'interprétation

physique du développement déductif de la mécanique parviendra à poursuivre, par une série d'inductions successives, le processus d'acquisition des concepts de la science.

Nous verrons dans le livre III comment cette interprétation peut conduire à une véritable *correction de la mécanique classique*.

LIVRE III

L'EXTENSION DE LA MÉCANIQUE

CHAPITRE I

LA PHYSIQUE COMME EXTENSION DE LA MÉCANIQUE

§ 1. **Développement de la philosophie mécaniste.** — « *Expliquer et représenter comme mouvement tout ce qui succède au mouvement et tout ce qui le précède* », tel est le problème posé par la philosophie de Descartes, vers la solution duquel s'efforcent de différentes manières, depuis deux siècles, les plus grands théoriciens de la physique.

Laissons pour l'instant de côté le point de vue qui caractérise et différencie proprement la pensée cartésienne d'autres tendances voisines, et considérons, sous son aspect le plus général, le processus génétique des concepts qui conduit à la construction de la mécanique et à son extension progressive à la physique. Nous reconnaissons dans ce processus un double développement :

1° Un développement *intérieur*, qui a pour idée directrice la *réduction* progressive *des données primitives* des sens, associées dans les concepts;

2° Un développement *extérieur* et particulièrement *en extension* qui cherche à associer dans le même concept une variété toujours plus grande de données sensibles.

Descartes a fixé hardiment le terme de l'un et l'autre développement, avant que la mécanique fût constituée par Newton. D'une part, la réduction doit être poussée jusqu'à la suppression de toute différence qualitative des données sensibles, c'est-à-dire jusqu'à une parfaite unification. D'autre part, l'extension ne doit rencontrer aucune limite; l'univers physique doit trouver son explication adéquate dans la mécanique. Ce grand dessein métaphysique représente, pour ainsi dire, le cadre idéal dans lequel se meut le progrès de la science moderne, et le travail énorme de deux siècles a certainement conduit la physique à des acquisitions remarquables dans ce sens.

Mais, à la fin, il en est sorti de nos jours une conséquence absolument imprévue de ceux qui la provoquèrent : une critique nouvelle des principes mêmes de la mécanique que l'on considérait comme des vérités indiscutables et rigoureuses; une recherche de la signification qu'on peut ou doit leur attribuer pour qu'ils deviennent valables dans une sphère plus étendue de phénomènes; et, finalement, une correction de la dynamique newtonienne que des recherches récentes tendraient à justifier.

Telles sont les vues caractéristiques de la pensée contemporaine. Bien qu'elles reconnaissent la valeur progressive de la science, elles repoussent comme absurde la prétention de conférer à la mécanique une valeur *absolument rigoureuse et universelle*, sans pouvoir toutefois fixer de limites à son extension et aux perfectionnements corrélatifs de ses principes.

Il convient, avant tout, de mettre en lumière l'idée mère de la philosophie cartésienne, qui est de réduire les différences qualitatives à des rapports de quantités.

§ 2. Quantité et qualité : l'hypothèse cartésienne.

Quare opium facit domire?
Quia est in eo virtus dormitive,
Cujus est natura sensus assopire.

Cette célèbre réponse du médecin de Molière est souvent rappelée comme type des *explications* scolastiques. Celles-ci perdraient d'ailleurs leur ridicule, si elles se bornaient, comme dans l'esprit de la philosophie d'Aristote, à la simple constatation *empirique* des faits observés ; et si elles n'avaient pas la sotte prétention d'y ajouter quelque chose, en créant le nom d'une qualité correspondante.

A la conception d'Aristote s'oppose la conception cartésienne d'une *explication rationnelle* basée sur une hypothèse métaphysique. Au-dessous des différentes *qualités* qui sont les apparences du monde phénoménal, se trouve une *substance unique* susceptible seulement de *différenciations quantitatives*. L'explication des phénomènes se réduit à la connaissance des rapports de quantité qui leur sont inhérents.

Pour bien pénétrer le sens de cette opposition, il est nécessaire d'éclaircir la distinction entre qualité et quantité, une des plus délicates dont les philosophes aient eu à se préoccuper.

On nomme *quantités* les objets d'une classe pour lesquels on a défini l'*égalité* et l'*addition*. Cette définition a pour conséquence la possibilité d'établir un rapport entre de tels objets (la *mesure* de l'un par rapport à l'autre).

Dire que deux objets d'une classe donnée sont égaux, signifie que l'on fait abstraction de leurs caractères divergents pour ne retenir que leurs caractères similaires dans une même représentation abstraite.

Le sens propre de l'addition est de « réunir », ou de « mettre ensemble » l'un « à côté » de l'autre, ou l'un « après » l'autre, des objets pris comme parties ou facteurs ; pour cela, il est nécessaire d'associer directement dans l'espace ou dans le temps les groupes de sensations qui correspondent aux parties additionnées.

Reportons-nous à quelques exemples.

§ 3. **Le poids**. — Les distances, les volumes, les poids constituent autant de classes de quantités. Elles sont conçues comme telles, dès que l'on a défini les notions de « distances égales », « volumes égaux », « poids égaux » et celles de leur « addition ». Arrêtons-nous sur l'exemple des poids.

Prenons une balance avec une certaine charge, et supposons que le corps A, mis sur le plateau, fasse équilibre à cette charge. Substituons à A le corps B : si l'équilibre se maintient, nous dirons que « les poids de A et B sont *égaux, relativement à la balance donnée* ».

Le sens de cette définition est une dissociation et une abstraction. Distribuons les corps en classes, en mettant dans une même classe ceux que l'on peut substituer les uns aux autres pour faire équilibre à la même charge d'une balance. Nous construirons ainsi le concept abstrait de « poids relatif à une balance », par rapport auquel n'importe quel élément de la classe peut être remplacé par tout autre. Les propriétés formelles de l'égalité reflètent ce processus psychologique d'abstraction.

Procédons, maintenant, à une seconde abstraction. Comparons différentes balances. « Si deux poids égaux par rapport à l'une le sont encore par rapport à une autre », on peut considérer l'égalité des poids comme un *rapport entre les corps* comparés, *indépendamment* de toute référence à une balance particulière.

Définissons « l'*addition* ». L'addition de deux poids A et B est le poids du corps qu'on obtient en réunissant A et B, ou tous autres corps de poids égaux qui leur sont substituables.

« Si A et C sont donnés, il existe toujours un poids B qui, additionné à l'un d'eux, donne un poids égal à l'autre.

Il en résulte qu'on peut considérer les poids comme des quantités, c'est-à-dire comme des sommes de parties.

Il n'est pourtant pas évident *a priori* que « des sommes de poids égaux soient égales ». En effet, si A et A′ équilibrent également la charge d'une balance, et s'il en est de même de B et B′, il ne s'ensuit pas pour cela que A′ puisse être substitué à A sur la balance en équilibre qui porte sur son plateau A—B. Mais, étant donnée la variété des combinaisons possibles, on reconnaît que cette possibilité de substitution est implicitement contenue dans l'indépendance du poids vis-à-vis de la balance. Nous avons donc les relations fondamentales qui nous permettent de considérer les poids comme une « classe de quantités ».

On peut parvenir à la définition de cette classe en recourant à d'autres procédés, et leur concordance implique l'existence de faits qui sont généralement supposés dans le concept du poids. Ainsi, par exemple, avec une balance (il est ici essentiel qu'il ne s'agisse pas d'une balance romaine), on peut comparer directement les poids de deux corps A et B en les posant sur les deux plateaux. La première observation à faire est alors que « l'équilibre persiste, quand on interchange A et B », par conséquent que « si A équilibre de B et C, B et C s'équilibrent » ; enfin « que l'équilibre A et B est indépendant de la balance particulière de référence ». On a ainsi les propriétés fondamentales inhérentes à l' « égalité des poids ».

§ 4. **Quantités de chaleur.** — Un second exemple de la définition d'une classe de quantités nous est fourni par la chaleur. On définit les « quantités de chaleur » absorbées ou émises par un corps pendant une variation de température, en se rapportant à la masse d'une substance calorimétrique donnée, dont la température varie suivant la chaleur absorbée ou émise entre deux températures données (l'égalité de température est supposée définie en partant de l'équilibre thermique, comme nous le verrons plus loin).

Ce mode de comparaison nous conduit directement à fixer ce que l'on entend par quantités de chaleur « égales » et par « addition de deux quantités de chaleur ».

On exprime ainsi un processus d'abstraction qui suppose trois faits fondamentaux, analogues à ceux que nous avons rencontrés plus haut : l'indépendance du rapport défini vis-à-vis de la substance calorimétrique particulière de référence ; la possibilité de substituer des quantités de chaleur considérées comme égales dans la comparaison calorimétrique (propriété transitive de l'égalité) ; et, enfin, l'égalité des sommes de quantités égales. La vérification de ces faits constitue la condition essentielle pour rendre possible le processus qui nous conduit à définir des quantités.

Cependant, dans beaucoup de cas, un tel processus

est impossible. La chaleur même nous en offre un exemple, si l'on cherche à définir, non plus les quantités de chaleur, mais les *températures*. On a recours, dans ce cas, à un corps de comparaison, le thermomètre, en prenant toujours pour point de départ le passage de la chaleur entre deux corps en contact. En partant de l'équilibre thermique, on définit les « températures égales » ; cette relation se montre indépendante des thermomètres employés et satisfait aux propriétés formelles de l'égalité. Mais considérons, maintenant, l'addition de deux températures : en réunissant deux corps également chauds, on n'obtient pas un corps plus chaud; la température ne varie pas. Nous sommes donc arrêtés dans notre tentative de considérer les températures comme des quantités, c'est-à-dire comme des sommes de parties.

Pour atteindre ce but, il faut posséder, non pas le concept de « températures égales », mais celui d' « accroissements égaux de température ». On pourrait, alors, considérer comme somme de deux accroissements de température de A à B et de B à C, l'accroissement de température par lequel on passe de A à C en réunissant les deux accroissements successifs. Mais, si chaque thermomètre de référence permet de définir des accroissements égaux de température, cette définition est relative au choix de la substance thermométrique employée, puisque « les accroissements de température qui correspondent à des dilatations égales d'une substance donnée, correspondent à des dilatations inégales d'une autre substance », et que, d'autre part, nous n'avons pas une sensation de l'accroissement de température propre à nous imposer le choix d'un certain groupe de thermomètres.

§ 5. **La mesure de l'intensité.** — Quelle signification

a, dès lors, l'hypothèse métaphysique qui postule au-dessous de tout changement phénoménal, un substrat quantitatif? Admettons, par exemple, que la chaleur soit due à un fluide particulier contenu dans les corps.

Pour un observateur doué de sens assez subtils, l'échauffement serait accompagné de la vue de l'augmentation de la quantité du fluide. Prenons le phénomène calorifique dans son entière complexité, comme impression tactile et observation visuelle. En faisant abstraction de la première catégorie de sensations, nous arrivons ainsi à représenter les températures comme des quantités proportionnelles à la densité du fluide calorifique. L'hypothèse du fluide calorifique a donc pour intérêt de nous conduire à considérer un élément quantitatif comme étant essentiellement associé à la température. Il est vrai que nous ne pouvons le constater par suite de l'obtusité de nos sens; mais nous gardons l'espoir qu'entre toutes les associations possibles du phénomène, on pourra distinguer un groupe d'associations *remarquables* qui nous amènera à la constatation indirecte de son substrat hypothétique. De plus, la représentation du fluide calorifique nous conduit, comme nous le verrons, à faire un choix concret. C'est le même rôle que joue, en général, l'hypothèse cartésienne pour la *mesure de l'intensité*.

Si, pour une série de phénomènes, on a pu définir le sens des signes $=$, $>$ et $<$, on obtient, par abstraction, une *série de degrés d'intensité*. A ces degrés, on peut faire correspondre les nombres ou les quantités croissantes d'une classe. L'hypothèse cartésienne conduit à établir une pareille correspondance, et permet de lui accorder, dans chacune de ses expressions concrètes, un sens dépourvu d'arbitraire.

Il y a lieu de noter, ici, que l'espoir de découvrir une mesure de l'intensité, en rapport avec un des aspects essentiels des phénomènes, a pour effet de nous conduire à préférer une certaine mesure déterminée. Si même ces associations entre les degrés d'intensité et les quantités discrètes de l'algèbre n'ont pas de signification réelle particulièrement remarquable, le fait qu'elles conduisent à une mesure est un résultat suffisamment important, que Duhem apprécie en ces termes :

« Cette extension de la notion de mesure, cet emploi du nombre comme symbole d'une chose qui n'est pas quantitative, eût sans doute étonné et scandalisé les péripatéticiens de l'Antiquité. Là, est le progrès le plus certain, la conquête la plus durable que nous devions aux physiciens du XVIIe siècle et à leurs continuateurs; ..... ils ont établi cette vérité d'un prix inestimable : *il est possible de discourir des qualités physiques dans le langage de l'algèbre* ».

§ 6. **Mesure naturelle ou absolue : la température.** — Mais, comme nous l'avons déjà dit, l'hypothèse métaphysique cartésienne ne conduit pas seulement à une représentation quantitative ou à une mesure de l'intensité : elle prétend écarter encore l'arbitraire presque illimité des associations capables de nous la fournir, et veut ainsi établir une mesure privilégiée, *naturelle* ou *absolue*.

Revenons à l'exemple de la température : la mesure, étant relative au thermomètre, est définie à une substitution linéaire près :

$$\tau = f(t),$$

où f désigne une fonction croissante arbitraire.

Or, l'hypothèse du fluide calorifique nous conduit à

l'idée d'une mesure *absolue* des températures, c'est-à-dire à rechercher « si, aux variations que les corps subissent dans leur échauffement, ne correspond pas quelque quantité indépendante de la qualité du corps envisagé, qui subisse des accroissements égaux, entre des températures égales, pour des corps différents ».

En fait, si l'on accepte cette hypothèse, la quantité de chaleur Q, contenue dans un corps, sera une quantité de fluide proportionnelle au volume occupé et à la densité t; et t représentera la température absolue. L'hypothèse du fluide calorifique nous conduit donc à admettre que les quantités de chaleur acquises ou cédées par des corps différents, dans le passage de températures égales à d'autres températures égales, sont proportionnelles.

Cette conséquence est loin d'être vérifiée, en général; mais elle se vérifie dans le *cas limite* des transformations réversibles (*adiabatiques*), pour lesquelles la condition de l'indestructibilité de la chaleur, supposée par l'hypothèse, se trouve réalisée. Et l'important est que la définition positive de la *température absolue*, à laquelle on est ainsi conduit par les transformations réversibles, se révèle comme tout à fait indépendante de l'hypothèse du fluide calorifique et subsiste à titre d'expression d'un fait, bien que cette hypothèse se montre impropre à expliquer la conversion de la chaleur en travail mécanique et la production de la chaleur au moyen du frottement ou du choc des corps, etc.

Le fait impliqué dans la définition de la température absolue peut être reconnu à travers différentes hypothèses représentatives, par exemple, à travers la *théorie cinétique des gaz*, où l'on prend comme température absolue la force vive moyenne des molécules gazeuses en mouvement.

Ces deux représentations comprennent le même fait, en tant qu'elles expriment certaines associations des données sensibles. Mais elles ne se recouvrent que partiellement, la seconde représentation donnant quelque chose de plus, c'est-à-dire conduisant à fixer le *zéro*, de sorte que la température soit définie à un facteur près dépendant du choix de l'unité de mesure, tandis qu'elle n'est déterminée, dans la première représentation, qu'à une substitution linéaire près

$$\tau = at + 6.$$

Ce choix d'un zéro absolu équivaut à reconnaître l'existence d'un *maximum* de quantité de chaleur (ou de travail) que peut fournir un gaz.

Il faut noter, enfin, que le fait fondamental sur lequel repose la définition de la température absolue, est complété, grâce à la théorie cinétique des gaz, en reconnaissant que les quantités de chaleur acquises ou cédées sont proportionnelles aux variations de température, et, par conséquent, proportionnelles entre elles (loi de *Joule*) et aux dilatations de ces gaz. Il en résulte un accord des thermomètres à gaz, accord qui ne subsiste, cependant, qu'à l'ordre d'approximation dans lequel s'applique la théorie cinétique sous sa forme la plus simple.

§ 7. **Récapitulation et critique.** — De la discussion précédente, on peut dégager la conclusion suivante : la représentation d'une série de données phénoménales comme quantités est le résultat d'un processus d'abstraction et d'association qui comporte certaines suppositions de faits. La réussite d'un tel processus, pour chaque catégorie d'associations, est liée à l'existence de ces faits; mais, en cas d'absence de ceux-ci, elle est encore rendue possible par l'extension de ces

associations mêmes, c'est-à-dire quand on fait correspondre aux données qualitatives des phénomènes d'autres données quantitatives qui s'y rattachent dans la réalité. Cependant, la représentation quantitative ainsi obtenue reste une convention *arbitraire* jusqu'à ce qu'on ait réussi à déterminer un *groupe d'associations remarquable*, par rapport auquel la convention prend le caractère d'*invariant*. L'hypothèse métaphysique de Descartes exprime notre confiance générale dans la possibilité de découvrir de semblables invariants (mesures *naturelles* ou *absolues*), et suscite la recherche, dès qu'elle a pris corps dans un *système d'images* approprié.

Il y a plus. Cette hypothèse facilite encore la considération des rapports phénoménaux auxquels se rattachent nos attentes, en les exprimant au moyen de *rapports quantitatifs* entre les mesures (naturelles) de certaines données ; et les images employées concourent à cette *traduction analytique* de la réalité physique, soit en nous guidant dans la découverte de ces rapports, soit en en facilitant l'interprétation. C'est dans ce fait que réside la valeur de l'hypothèse métaphysique de Descartes pour le progrès de la science.

C'est, tout au moins, en ce sens que nous avons interprété la métaphysique de la quantité, en n'en retenant que le contenu positif. Mais cette métaphysique a, de plus, la prétention d'exprimer une *réalité inaccessible et universelle*, au moyen des images employées. Elle admet ainsi, avant tout, que ces hypothèses figuratives ont une valeur de faits, c'est-à-dire impliquent des *sensations possibles pour un observateur doué de sens suffisamment déliés ;* en second lieu, que l'on peut trouver une expression concrète propre à rendre compte de *tous* les rapports possibles entre les ordres les plus variés de phénomènes.

La première prétention, pour celui qui veut la prendre dans un sens positif, limiterait énormément la construction des images. Un examen comparatif de celles qu'on a effectivement construites montre de suite que ces limites ne sont pas respectées ; que les hypothèses figuratives, plutôt qu'elles n'augmentent le nombre des sensations imaginaires, les dénaturent ; qu'en raisonnant sur elles on est obligé d'écarter une série de conséquences contradictoires, auxquelles on ne saurait échapper si on leur attribuait un contenu de faits.

Si même on admettait que l'hypothèse métaphysique représente, dans toutes ses expressions concrètes, un *modèle* propre à exprimer un certain ordre de phénomènes réels, il resterait encore à savoir s'il est concevable qu'on arrive à un modèle unique, adéquat à la *réalité universelle*.

L'absurdité de cette prétention devient manifeste pour quiconque considère les *modèles partiels* comme des résultats d'associations et d'abstractions, puisqu'un modèle universel impliquerait une extension transcendante de ce processus psychologique.

Et, en venant à l'examen des cas particuliers, nous verrons mieux encore comment la construction d'un modèle représente toujours un parallélisme entre deux séries de phénomènes, et a nécessairement, de ce fait, une valeur de réduction *relative* et *limitée*, en tant qu'aucune série ne peut être prise comme absolument isolée de toutes les autres.

La métaphysique de la quantité, bien qu'on ne puisse l'accepter dans sa généralité intégrale, n'en reste pas moins l'idée directrice d'un mouvement scientifique séculaire, et il importe de voir comment elle se manifeste concrètement dans une *physique considérée comme extension de la mécanique*. Nous passerons donc en revue les diverses théories qui tendent à fixer, à l'aide d'une vision dynamique, les *rapports quantitatifs* de quelques données considérées comme caractéristiques, et à considérer ces rapports comme conduisant à une détermination parfaite des prévisions de faits.

Nous nous proposons de relever et d'expliquer :

1° La tendance réductrice des données primitives de la mécanique et sa signification psychologique ;

2° De quelle manière et dans quelles limites ces développements nous amènent à confirmer ou à corriger les postulats de la dynamique ;

3° La valeur de connaissance et la valeur heuristique des modèles mécaniques.

CHAPITRE II

LES DEUX FORMES DU MÉCANISME : LA THÉORIE CINÉTIQUE DES GAZ ET LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ

§ 8. **Les deux types de mécanisme : le type cartésien et le type newtonien.** — Les données de la mécanique diffèrent qualitativement : il en est d'*extensives* (les données géométriques et cinématiques), et d'*intensives* (les données dynamiques ou les forces). Le développement intérieur de la philosophie mécaniste tend à leur réduction progressive.

Dans la physique cartésienne, on cherche à réduire les données intensives aux extensives, qui conduisent immédiatement à des représentations quantitatives au moyen des sensations visuelles. En ce sens, une *explication des forces* est requise. La physique newtonienne, au contraire, place les forces, conçues comme actions élémentaires entre les particules des corps, au nombre des données primitives qu'elle cherche à unifier en ramenant aux forces l'explication d'autres données extensives: les liaisons des systèmes notamment.

On peut illustrer, sous différents aspects, la différence de ces deux types de mécanisme :

1° Le type cartésien est un modèle exclusivement

optique; le type newtonien est un modèle surtout *tactile* et *musculaire* de la réalité physique;

2° Le type cartésien correspond à la *phase associative* du processus scientifique; le type newtonien correspond plutôt à sa *phase abstraite*. Aussi, la représentation quantitative des phénomènes est, pour les cartésiens, un résultat dont il faut expliquer l'*origine*, et les associations visuelles en fournissent une intuition *claire et distincte*; au contraire, cette représentation est souvent prise par les newtoniens en un sens plus large, comme une donnée actuelle à *utiliser* et en poursuivant les applications;

3° Le type cartésien correspond surtout au *développement intérieur* de la mécanique; le type newtonien regarde plutôt son *développement extérieur*.

On doit considérer la tendance cartésienne, qui a polarisé les représentations dans un sens optique, surtout comme un effort vers l'association *plus unifiée* des données sensibles, car les images visuelles, en général, ont une place prépondérante dans les constructions psychologiques et ne peuvent, en tout cas, être éliminées par l'intuition des forces, du mouvement, etc. Au contraire, on doit envisager la tendance newtonienne vers un modèle tactilo-musculaire, qui se superpose à l'intuition visuelle dans une construction abstraite, plus spécialement comme un effort vers l'association *plus étendue* des données sensibles.

La première tendance a donc surtout une valeur *économique* pour la science achevée, et une valeur *psychologique* de stimulation à la recherche; la seconde répond mieux aux fonctions de la *prévision* scientifique. Mais, avant tout, le succès des deux tendances est dû à leur alternance, et c'est ainsi que la gnoséologie positive les concilie dans un point de vue supérieur : celui du progrès scientifique. Si l'on

prend comme but supérieur l'association et l'unification plus étendue des différentes données sensibles, on reconnaîtra, en effet, que l'alternance de ces deux tendances a conduit plus près de ce but.

Aux premières tentatives dans le sens cartésien, nous sommes redevables, particulièrement, de la théorie cinétique des gaz. Mais le développement ultérieur des études sur l'élasticité (soit la recherche d'une représentation plus exacte des propriétés des gaz, soit de celle des solides ou des liquides) trouve son expression dans une explication du type newtonien. Celle-ci se développe, en se compliquant, dans la théorie mécanique de la chaleur et s'élève à sa forme la plus abstraite dans la mécanique énergétique, où, cependant, les vues sur la localisation et sur le mouvement de l'énergie (qui se rattachent au progrès des théories électriques) viennent confirmer la tendance opposée vers le système cartésien.

Un progrès de l'explication mécanique dans le sens cartésien se révèle, en effet, dans les théories électro-optiques; la notion des liaisons s'étend avec Maxwell et W. Thomson, etc.; l'image visuelle de l'atome acquiert une fonction plus large dans les récents développements ; et, pourtant, un retour offensif de la tendance opposée se confirme dans un modèle électrique de la dynamique.

Bien qu'un mouvement aussi varié n'aboutisse pas à une conclusion unique, on peut dire synthétiquement que ces développements ont conduit, d'une part, à l'*unification des forces;* de l'autre, à l'*extension des liaisons*; et, par conséquent, qu'on s'est rapproché, de diverses manières, d'une association plus unifiée et plus étendue des données sensibles.

Nous éclaircirons ces vues en examinant les diverses théories de la physique. Mais cet examen nous

montrera, surtout, comment les multiples acquisitions partielles de la science rendent compte de la période critique qu'elle subit actuellement, où le défaut de vérification semble provoquer une nouvelle évolution inductive de la mécanique.

§ 9. **La réduction des forces au choc : la gravitation.** — Les *explications* de la force étaient à l'ordre du jour au XVIIIe siècle. Sous l'impulsion de Gassendi, de Descartes, de Huyghens, on chercha à se rendre compte des propriétés dynamiques de la matière en rappelant les anciennes images de Démocrite et d'Epicure : *corpuscules* mobiles, *chocs*, *tourbillons* des liquides ambiants.

C'est à cet ordre d'idées que se rattache l'explication de la gravitation de Fatio de Duilliers, reprise plus tard par Lesage, au moyen des *corpuscules ultramondains.*

Quel est le sens d'une telle explication de la force? Observons, à cet effet, deux corps élastiques qui se meuvent en s'entre-choquant. On peut distinguer trois moments du phénomène : le mouvement, la force et de nouveau le mouvement. La force, qui sort du champ de la vision et se présente successivement comme « effet » et comme « cause », peut être idéalement supprimée pour celui qui associe les deux moments du mouvement en les reliant l'un à l'autre par le choc considéré descriptivement. On obtient ainsi une succession d'images visuelles, dont le rapport, une fois connu, permettrait d'éliminer et, par conséquent, en ce sens, d'expliquer la « force ».

Mais la difficulté gît dans la détermination des lois du choc, sans le secours d'une image tactilo-musculaire. Car, si l'on a recours à une telle image, en dérivant les lois élémentaires du choc de la considération

des corps élastiques, le résultat obtenu n'aura, évidemment, qu'une valeur relative de réduction.

Dans les hypothèses de Fatio et de Lesage, cette réduction prendrait la signification suivante : la force newtonienne qui s'exerce à distance serait représentée comme un effet de forces élémentaires agissant en contact, conformément au progrès auquel tend généralement la représentation de l'idée de cause. Il en résulterait une correction de la théorie de Newton, par l'introduction d'une vitesse finie de propagation de la gravitation, hypothèse qui n'a pas encore pris corps de façon à s'accorder avec les observations des mouvements planétaires, mais qui se représente de nos jours, comme nous le verrons, sous une forme nouvelle.

§ 10. **La théorie cinétique des gaz.** — Daniel Bernoulli recourut également, en 1738, aux chocs de particules mobiles pour expliquer la pression des gaz. Ce fut l'origine de la *théorie cinétique des gaz*, reprise un siècle plus tard par Krönig et Clausius (1856-1857) et amenée à un plus haut degré de perfection par Maxwell, Boltzmann et Van der Vaals.

Dans la représentation primitive de Bernoulli, les particules élémentaires des gaz se meuvent en ligne droite, jusqu'à la rencontre de la paroi du récipient, avec une même vitesse uniforme qui conduit naturellement à une mesure de la température. Cette image dut être corrigée dès que l'on voulut tenir compte des chocs entre les molécules, que l'on ne saurait négliger, si l'on accorde à celles-ci des dimensions qui ne soient pas nulles. Par suite de ces chocs, les vitesses moléculaires, bien que supposées égales au début, doivent différer dans la suite entre de larges limites. Il s'agit, dès lors, de représenter les effets

moyens du phénomène suivant les lois de la *probabilité;* en particulier, la force vive moyenne fournira la mesure naturelle (ou absolue) de température, conformément à la loi de Joule.

Les conséquences de ces principes sont très étendues. Si l'on fait abstraction des dimensions moléculaires on obtient, en *première approximation*, les lois des gaz exprimées par la formule

$$pv = RT$$

(p = la pression; v = le volume spécifique; T = la température; R = une constante pour tous les gaz).

Ce sont les lois de Boyle, Gay-Lussac et Avogadro pour les gaz parfaits.

Ces lois ne sont pas exactement confirmées par l'expérience pour les gaz réels. Les écarts en différents sens, qui dépendent de multiples conditions, demandent à être expliqués en poussant la théorie à *un second degré d'approximation*. Comme Bernoulli l'a prévu, en tenant compte des dimensions moléculaires, on obtient déjà une première correction, mais bien loin encore de satisfaire aux exigences expérimentales. Evidemment, une nouvelle correction est requise au sujet de la représentation de la molécule qu'on a assimilée à une sphère élastique impénétrable. Dans quel sens doit-on modifier cette image un peu grossière?

La molécule apparaît déjà en chimie comme un système mécanique complexe, dès que certains phénomènes nous conduisent à admettre sa dissociation en ions. Aussi, pour perfectionner la théorie cinétique, a-t-on eu recours à l'hypothèse d'un champ d'actions variables avec la température, et de forces répulsives s'exerçant entre les molécules de ce champ;

on fixait même l'attention sur une loi particulière $\left(\frac{1}{r^5}\right)$.

Ces développements nous éloignent, comme on le voit, du mécanisme cartésien qui, suivant l'idée primitive, se présentait comme apte à expliquer la force qui naît de la pression d'un gaz; mais ils marquent un progrès extensif de la théorie dans l'étude des propriétés des gaz, bien que les propres fondateurs de la théorie s'accordent à ne reconnaître aux hypothèses adoptées qu'un caractère provisoire.

§ 11. **Théorie de l'élasticité : les solides.** — Admettons d'ailleurs que le mécanisme simple, basé sur l'hypothèse du choc des sphères élastiques, se montre propre à poursuivre théoriquement l'étude des propriétés gazeuses, d'accord avec les expériences les plus précises. On ne pourrait, néanmoins, considérer la force élastique des gaz comme parfaitement *expliquée*, si l'on n'accepte pas comme donnée la notion de l'*élasticité des solides*. Comme nous l'avons dit, on doit nécessairement y avoir recours pour expliquer les lois du choc, si on ne veut pas le considérer, abstraitement, comme un pur fait optique, où l'on fait abstraction d'un moment essentiel du phènomène. On arrive à la même notion, si l'on cherche à se représenter, plus généralement, la nature physique des *liaisons*, en les réduisant à des forces entre les points des corps (ch. III, § 24), et en essayant d'expliquer dans ce sens la rigidité approximative des corps solides, l'incompressibilité des liquides et les réactions élastiques qui en dérivent.

La difficulté de se former une pareille représentation de l'état solide et liquide de la matière apparait

plus grande que pour l'état gazeux. Résumons-en brièvement l'historique.

Inspiré par la conception astronomique de Newton et par quelques vues de cet auteur au sujet des phénomènes de capillarité, Boscovich (1763) imagina une représentation générale de la matière. Il la conçoit comme un système mécanique constitué par des *points* doués de masses, exerçant les uns sur les autres des actions et des réactions égales et contraires, qui, pour chaque couple de points, sont dirigées suivant la droite qui les unit et sont fonction de la distance (*forces centrales*).

Cette théorie fut adoptée, pour traiter des problèmes concrets, par l'école de Laplace. Celui-ci, en particulier, porta à un haut degré de perfection l'explication de phénomènes de capillarité qu'avaient déjà traités, suivant la théorie de Newton, différents prédécesseurs. Cette tendance conduisit Poisson à fonder la *mécanique physique*, qui s'oppose à la *mécanique analytique* de Lagrange, en essayant de réduire systématiquement la notion de liaisons à celle de forces.

En 1821, Navier, partant des idées de Poisson, soumit, le premier, à un traitement analytique les principes de la théorie des solides, que développèrent dans la suite, en différents sens, Cauchy, Poisson, Green et Lamé.

Il importe d'examiner de près les conclusions de ces travaux. Supposons que nous partions des hypothèses suivantes :

a) 1° Les points matériels, constituant un solide, se trouvent à l'état d'équilibre;

2° La distribution de la matière est homogène;

3° Les forces intérieures résultent d'actions élémentaires entre les particules des corps et sont centrales.

On peut alors écrire les *équations de l'équilibre des solides élastiques*, dans lesquelles figurent quinze coefficients indépendants. Si le corps est *isotrope*, les coefficients se réduisent à un seul, et l'on trouve, en particulier, que le coefficient de compressibilité cubique et celui de traction sont entre eux dans le rapport 3 : 2. –

Ces conséquences des vues de Navier et de Poisson sont en désaccord avec les résultats obtenus en suivant la méthode générale qui repose sur le principe des travaux virtuels (liv. II § 26). Si l'on admet :

b) 1° Que les points d'un solide élastique sont soumis, en plus des forces extérieures et des forces de masse, à des *forces intérieures*, sur l'origine desquelles on ne fait aucune hypothèse ;

2° Que le travail des forces extérieures dépend de la déformation de l'élément de volume et s'exprime par conséquent en faisant abstraction des infiniment petits d'ordre supérieur, dans une fonction quadratique, au moyen de 6 composantes de déformation, c'est-à-dire des variations des côtés et des angles d'un parallélépipède ; alors, le principe des travaux virtuels conduit (avec Green) à des équations de l'élasticité plus générales, où figurent 21 coefficients indépendants au lieu de 15. Dans le cas des solides isotropes, on a 2 coefficients indépendants dont le rapport peut avoir une valeur quelconque.

Or, la plus grande généralité de cette seconde théorie correspond, dans la réalité, à différents cas possibles : tandis que les coefficients d'élasticité des métaux s'accordent, dans une certaine mesure, avec les prévisions de la première théorie, le cas d'un solide quasi incompressible, comme la gélatine, y échappe.

On peut songer à modifier les hypothèses de

Poisson. Dans ce sens, on a proposé une modification à l'hypothèse 3, qui s'est introduite dans quelques traités récents des plus autorisés. Elle consiste en ceci :

3$^{o\prime}$ La force, agissant sur un point matériel du solide, dépend *de l'ensemble* des particules voisines et ne peut se décomposer en une résultante d'actions élémentaires ; ou bien

3$^{o\prime\prime}$ Les actions élémentaires entre les points du solide ne sont pas centrales.

Ces hypothèses contredisent directement la statique classique : la première nie le principe de la résultante, la seconde le principe d'action et de réaction.

Il est naturel qu'on ait cherché à échapper à une semblable conclusion ; Poisson l'essayait déjà en recourant à des hypothèses sur la *forme* des atomes, mais, à vrai dire, de telles considérations apparaissent un peu artificielles.

W. Thomson a indiqué une solution plus satisfaisante, en proposant de modifier l'hypothèse *a*) 2 ou *a*) 1, et particulièrement cette dernière. Elle consiste essentiellement à admettre que les points matériels d'un solide en équilibre sont effectivement en mouvement, c'est-à-dire que, là où nous voyons le repos, il ne s'agit que d'*équilibre statistique* dans le sens de la théorie cinétique des gaz, procédé de résoudre la difficulté qui pourrait paraître audacieux, mais qui reçoit un encouragement de la théorie mécanique de la chaleur. Si nous acceptons cette modification, on ne peut plus remplacer, à chaque instant, les forces centrales qui s'exercent entre les points en mouvement par des forces, également centrales, s'exerçant entre leurs positions moyennes. En ce sens, les hypothèses 3′ et 3″ se présentent comme des simplifications schématiques de la représentation.

On entrevoit ainsi en quel sens un mécanisme du type newtonien permettrait d'expliquer l'élasticité des solides, aussi bien que le principe des travaux virtuels. Et ce que nous venons de dire des solides, est vrai aussi des liquides.

Cependant, on reproche à *la théorie cinétique de la matière* d'être en général peu féconde en résultats positifs, bien que la représentation qu'elle fournisse se rattache à la théorie mécanique de la chaleur. Nous viendrons bientôt à l'étude de cette théorie. Auparavant, examinons une objection à la théorie générale de l'élasticité soulevée par l'expérience.

§ 12. **Les altérations permanentes.** — L'hypothèse fondamentale, qui permet de calculer les forces extérieures d'un solide élastique au moyen d'une déformation infinitésimale, consiste à admettre que celle-ci dépend, pour chaque élément du corps, de la déformation *locale actuelle* et non pas de celles du reste du solide, ni de la série des *états précédents* par lesquels le solide a passé.

Une conséquence évidente de cette hypothèse est que, la force déformatrice cessant, le solide élastique doit reprendre son état primitif qui est son état *naturel*, et, d'une façon générale, que les déformations élastiques subies ne doivent pas modifier son élasticité.

Or, ces conclusions sont en contradiction directe avec les *altérations permanentes*, qui, par analogie avec les phénomènes d'*hystérésis magnétique*, ont reçu le nom de phénomènes d'*hystérésis élastique*. Cette contradiction se trouve à la base même de la théorie mécanique de l'élasticité.

G. Robin, dans ses leçons de Thermodynamique générale, a insisté sur ce que les principes de la mécanique impliquent une hypothèse de *non-hérédité*, puisqu'ils postulent que l'état futur d'un système dépend de ses conditions statiques *actuelles*. Dans quelques pages de son livre sur la « Science moderne et son état actuel », E. Picard développe des considérations intéressantes sur une mécanique où l'on aurait à tenir compte, au contraire de l'*hérédité* : certaines *équations fonctionnelles* y prendraient la place des *équations différentielles* classiques.

Les altérations élastiques permanentes, comme, en général, les différents phénomènes d'hystérésis, semblent exiger une modification aussi radicale de la mécanique ; mais on peut admettre aussi qu'il ne s'agisse que d'*hérédité apparente*. Pour faire entrer ces cas dans le cadre de la mécanique classique, il suffit d'admettre qu'on n'a pas tenu compte de *tous* les éléments notables qui déterminent le phénomène, c'est-à-dire de considérer le système comme *une partie d'un système plus ample*, auquel s'appliquent les principes de la mécanique. Cette façon de résoudre la difficulté donnerait lieu à un grand nombre de réflexions ; mais laissons pour le moment de côté ces *cas aberrants*, quitte, plus tard, à les reprendre en considération dans les conclusions finales de notre critique.

La théorie cinétique de la matière conduit directement au développement de la Thermodynamique qui s'y rattache.

CHAPITRE III

LA THERMODYNAMIQUE ET L'EXPLICATION MÉCANIQUE DE LA CHALEUR.

§ 13. **La théorie mécanique de la chaleur : la conservation de l'énergie.** — Si, comme l'admettait déjà Descartes, la chaleur est un mouvement désordonné des particules élémentaires de la matière, et si le mouvement se laisse expliquer au moyen de forces centrales, il doit exister un *équivalent mécanique* de la chaleur. Cette conséquence est contenue implicitement dans le principe des forces vives (L. II, § 28) ; elle précède d'un siècle la découverte de la conservation de l'énergie.

Beaucoup de savants se disputent le mérite de cette découverte. A la question de priorité se rattache le problème beaucoup plus intéressant pour le philosophe de reconnaître les rapports entre spéculation théorique et la recherche expérimentale.

Or, sans entrer dans un examen trop approfondi, on peut dire que la représentation du fluide calorifique, dont s'inspirent directement les premières recherches calorimétriques de Black et de Crawford, est la raison fondamentale qui a fait que la découverte de l'équivalence de la chaleur et du travail a tant tardé à suivre le principe des forces vives.

Cette représentation fut infirmée directement par les expériences de Rumford et de Davy qui, en 1812,

fut conduit à considérer de nouveau la chaleur comme une forme de mouvement. Cependant les études entreprises sur les machines thermiques par Sadi Carnot, en 1824, reposent toujours sur l'hypothèse du fluide calorifique indestructible. C'est seulement quelques années plus tard, que Carnot rectifia ses vues et arriva à reconnaître un équivalent mécanique de la chaleur. Seulement, ses notes à ce sujet restèrent inédites pendant quarante ans après sa mort, survenue en 1832.

Dans le *decennium* qui court entre 1830 et 1840, plusieurs penseurs s'approchèrent de l'idée que la chaleur est un mouvement pour en tirer celle de la permanence de ce que nous appelons aujourd'hui l'énergie : citons, par exemple, le travail de Mohr (1837), retrouvé par Tait. Il s'ensuit qu'on doit considérer plus ou moins explicitement la représentation mécanique de la chaleur comme l'idée directrice qui a conduit à la recherche d'une équivalence entre la chaleur et le travail, et, par conséquent, qui a préparé la découverte qui se rattache aux noms de Mayer (1842), de Joule et de Colding (1843).

Sans discuter les mérites respectifs de ces trois inventeurs, il suffit de constater que, quelles que fussent leurs vues respectives, ils se trouvèrent en face d'une *question déjà posée*. Précisément, dans le fait d'avoir posé la question, on reconnaît l'influence de la théorie sur la découverte expérimentale, c'est-à-dire la valeur heuristique du modèle qui envisage la chaleur comme une forme du mouvement.

C'est en vain qu'on citerait, à l'encontre de cette thèse, les opinions personnelles de Mayer qui repoussait une pareille conception mécanique, d'autant plus que, dans les recherches de Mayer, apparaît déjà postulée *a priori* la permanence d'un *quid* commun à

la chaleur et au travail et qu'il obtient, sans démonstration de ce fait, la détermination numérique de l'équivalent thermodynamique par la comparaison des chaleurs spécifiques de l'air.

Le rapport du principe d'équivalence avec la théorie mécanique de la chaleur fut nettement compris par Joule et Colding, et resplendit d'une lumière encore plus vive dans les travaux d'Helmholtz (1847). Si l'on considère chaque système isolé comme un mécanisme newtonien, de sorte qu'il existe un potentiel ou une énergie potentielle (dont la variation locale mesure la force), il y a lieu de considérer l'*énergie totale* du système, c'est-à-dire la somme de l'énergie potentielle et de l'énergie cinétique ou force vive, comme décomposée en *différentes énergies*, ayant chacune un sens physique propre : en énergie mécanique apparente (cinétique et potentielle), en énergie thermique ou quantité de chaleur, et, en général, en d'autres énergies (électriques, optiques, etc.). La somme de ces différentes énergies reste constante. C'est le principe général de la *conservation de l'énergie* qui comprend, comme cas particulier, l'équivalent mécanique de la chaleur.

Il convient de noter qu'on doit considérer, aujourd'hui, le principe de la conservation de l'énergie comme un *principe expérimental*, indépendant de l'hypothèse des forces centrales. Cette affirmation ne contredit pas le lien reconnu entre cette hypothèse et le principe : celui-ci est une conséquence de celle-là, mais la réciproque n'est pas vraie. Si des expériences variées et concordantes vérifient directement le principe de la conservation de l'énergie, on peut faire reposer la validité de ce principe sur une nouvelle base, sans que l'hypothèse initiale, qui en a suggéré la découverte, se trouve vérifiée pour cela autrement

que d'une façon indirecte et incomplète. Or, la confiance unanime dans le principe de l'énergie repose sur deux ordres de preuves :

1° Les expériences directes de Joule, Hirn, etc., dans lesquelles on retrouve l'équivalent mécanique de la chaleur à travers les transformations de l'énergie les plus variées ;

2° La preuve indirecte d'Hemholtz, qui a déduit ce principe de l'*impossibilité du mouvement perpétuel;* en considérant cette impossibilité comme démontrée par un examen critique de toutes les tentatives effectuées pour le découvrir.

§ 14. **Le second principe de la thermodynamique.** — Le second principe de la thermodynamique n'a pas du tout son origine dans les représentations mécaniques de la chaleur, mais il est suggéré par l'analogie de la chute de température avec le mouvement d'un fluide. Nous verrons les difficultés que l'on rencontre lorsqu'on veut le concilier avec la mécanique.

Sa découverte se rattache aux idées de Sadi Carnot sur les machines à feu ; il fallait seulement rectifier les résultats obtenus par cet auteur dans l'hypothèse du fluide calorifique, en les mettant d'accord avec le principe de l'équivalence thermodynamique, ce que fit Clausius en 1859.

Le principe fondamental de Clausius s'énonce ainsi : « Il est impossible de transporter de la chaleur d'un corps plus froid à un corps plus chaud, sans qu'il y ait, en même temps, destruction de travail et transport de chaleur d'un troisième corps chaud à un quatrième corps plus froid. » De ce postulat, on déduit un principe équivalent qui exprime l'*impossibilité du mouvement perpétuel de seconde espèce*, c'est-à-dire l'impossibilité de transformer de la chaleur en travail, en

enlevant de la chaleur à une seule source de température uniforme.

En combinant ce principe avec celui de l'équivalence, on parvient au théorème de Carnot-Clausius que nous énoncerons sous sa forme la plus générale, relative aux cycles réversibles, en laissant de côté quelques restrictions d'importance secondaire, dont il est fait usage dans sa démonstration :

Si un système de corps, après un cycle fermé de transformations réversibles, retourne à son état initial ; et, si l'on calcule, suivant la ligne de transformation s, la quantité de chaleur Q et la température (absolue) T du système, on a

$$\int \frac{dQ}{T} = 0.$$

Si, en conséquence, pour un cycle ouvert de transformations réversibles, on évalue l'intégrale de Clausius

$$s = \int \frac{dQ}{T},$$

on obtient une quantité dépendant seulement de l'état du système et non pas de la série des transformations qui ont eu lieu. Cette quantité prend le nom d'*entropie*.

On doit considérer le théorème de Carnot-Clausius comme le deuxième principe de la thermodynamique. Il s'agit maintenant de voir comment on parvient à en donner une explication mécanique.

Admettons que la chaleur soit l'expression sensible du mouvement intestin des molécules. Nous verrons alors dans les transformations thermodynamiques d'un corps un système mécanique, pour lequel on pourra distinguer deux composantes de l'énergie totale :

1° L'énergie *intérieure*, représentée par la *quantité de chaleur* Q ;

2° L'énergie cinétique *extérieure* ou *apparente*, due au mouvement visible du système.

Mais on peut négliger cette seconde énergie vis-à-vis de la première, si l'on se borne à considérer des *transformations lentes*, où les vitesses du mouvement visible sont très petites par rapport aux vitesses moléculaires.

Pour interpréter mécaniquement le deuxième principe de la thermodynamique, il faut alors chercher une expression dynamique pour une quantité représentant la température T, et qui, pour chaque transformation élémentaire, soit un diviseur intégrant de la variation dQ.

En outre, si, conformément à la théorie cinétique des gaz, on considère l'équilibre thermique comme un *équilibre statistique*, la propriété fondamentale de la température doit se trouver vérifiée, c'est-à-dire que, si on réunit deux systèmes, en équilibre statistique correspondant à la même valeur de T, on doit obtenir un système également en équilibre statistique, auquel corresponde la même valeur T.

La représentation des gaz, telle qu'elle résulte de la théorie cinétique (§ 10), conduit à définir la température absolue d'une façon qui satisfait aux conditions énoncées ; c'est une conséquence de ce que l'hypothèse cinétique comprend les lois des gaz parfaits.

La représentation mécanique des liquides et des solides s'accorde moins facilement avec le deuxième principe de la thermodynamique. Les principales tentatives pour construire un mécanisme propre à simuler les corps sont dues à Boltzmann (1866), Clausius (1871), H. Helmholtz (1884) et J.-W. Gibbs

(1902). Ces tentatives, notamment celles des deux derniers auteurs, laissent entrevoir la possibilité de l'explication mécanique désirée, bien qu'elles ne fournissent pas au problème une réponse entièrement satisfaisante.

Dans les mécanismes construits par Helmholtz (*systèmes monocycliques*), où s'introduisent des mouvements cachés à régime permanent, par exemple, des mouvements tourbillonnaires ou vibratoires, on arrive à définir T comme proportionnel à l'énergie cinétique moyenne des molécules, de sorte qu'il devient, pour chaque transformation élémentaire, un diviseur intégrant de la variation dQ; mais on ne voit pas bien comment est satisfaite pour T la dernière condition fondamentale rappelée ci-dessus.

Gibbs s'est préoccupé avant tout de répondre à cette condition. Il y est parvenu grâce à des hypothèses très générales, en considérant des systèmes composés d'un nombre immense d'éléments (corps) très variés. Malheureusement, ces systèmes s'éloignent du type du mécanisme newtonien, puisqu'on y considère des forces émanant de centres fixes, au lieu d'actions réciproques de particules en mouvement. Quand, pour les systèmes de Gibbs, une condition particulière est satisfaite (*distribution canonique*) on peut définir une certaine grandeur (*module de distribution*) T, qui jouit de la propriété fondamentale en question : pour que la réunion de deux systèmes à distribution canonique en équilibre statistique donne lieu à un système canonique en équilibre statistique, il faut et il suffit que les deux systèmes aient le même module de distribution. Mais les équations d'équilibre statistique pour les systèmes de Gibbs ne concordent pas exactement avec celles de la thermodynamique; il y a un écart qui tend à se réduire avec

l'augmentation du nombre des paramètres dont dépend la détermination de chaque élément du système, de sorte que *les lois thermodynamiques apparaissent ici comme cas-limites des lois mécaniques.*

§ 15. **Les phénomènes irréversibles.** — Il serait risqué de vouloir tirer de ce résultat une conclusion quelconque. Evidemment, les systèmes imaginés par Gibbs ne constituent pas la seule illustration mécanique possible des lois thermodynamiques. Il ne semble donc pas exclu qu'on puisse, sans sortir du type du mécanisme newtonien, arriver à la construction d'un modèle mécanique très général qui satisfasse rigoureusement aux conditions désirées. Mais il est un autre aspect du problème qui mérite d'attirer notre attention.

Nous avons considéré jusque-là les phénomènes thermodynamiques réversibles. Ceux-ci ne sont qu'un cas limite du cas général, où l'on a des phénomènes irréversibles, pour lesquels le théorème de Carnot-Clausius doit être modifié en substituant une inégalité à l'égalité qui y figure. Si l'on définit alors aussi, dans ce cas, la variation de l'entropie, on arrive au résultat suivant :

Dans chaque transformation irréversible d'un système isolé, l'entropie va continuellement en croissant.

Une pareille tendance semble orienter tous les phénomènes de la nature dans un sens bien déterminé. Comment concilier cela avec le mécanisme?

En effet, une des conséquences les plus évidentes de la forme des équations de Lagrange est la réversibilité des mouvements : tout système mécanique régi par ces équations, conformément aux principes de la dynamique, ne peut donc pas nous offrir un exemple de phénomènes irréversibles.

La difficulté semble à première vue inextricable : néanmoins, on a proposé deux explications pour la résoudre.

Helmholtz observe que la réversibilité appartient seulement aux systèmes mécaniques *complets;* pour les systèmes *incomplets*, on peut avoir une irréversibilité apparente. C'est ce qui arrive, par exemple, pour le pendule de Foucault par suite des mouvements de la terre qui complètent le système. On peut donc admettre que les phénomènes irréversibles, qui nous sont fournis par l'expérience, sont seulement la partie visible de phénomènes complets, dont les *mouvements cachés* constituent l'autre partie. L'irréversibilité constituerait ainsi l'apparence sensible de phénomènes qui, pris dans leur intégrité, seraient réversibles.

Il ne faut pas se faire illusion sur la portée d'une semblable explication. Duhem observe justement qu'elle rend compte de l'existence de processus irréversibles, mais qu'elle ne nous dit pas pourquoi ceux-ci obéissent tous à une orientation commune. A côté des systèmes où l'entropie va en croissant, il devrait s'en trouver pour lesquels le contraire ait lieu.

L'explication de l'irréversibilité proposée par les fondateurs de la théorie cinétique des gaz est beaucoup plus satisfaisante. Considérons un système composé d'un nombre considérable d'éléments, se mouvant de toutes les façons possibles; par exemple celui que nous avons indiqué comme modèle d'un gaz. Une transformation du système correspond au passage d'un état à un autre, chaque état étant défini par les vitesses des éléments en grandeur et en direction.

Faute d'une connaissance précise du processus, il est impossible de dire quelle sera la transformation

du système après un temps t. Mais toutes les transformations possibles ne sont pas également probables. Celles-là seront le *plus probables* qui se rapprochent d'une distribution des vitesses indiquées par Maxwell, pour laquelle devient maximum une certaine fonction H (qui jouera ainsi le rôle de l'entropie) correspondant à un état de pleine *désorganisation* du système. Il est permis d'affirmer qu'après un temps t suffisamment grand, la transformation du système se fera très probablement dans le sens de l'accroissement de H. Il est vrai qu'une telle transformation reste toujours théoriquement réversible, mais la transformation inverse ne peut être considérée comme aussi probable parce que sa continuation, pour une valeur plus grande de t, devrait nous conduire, suivant le calcul des probabilités, à un état désorganisé du système pour lequel H aurait une valeur plus grande.

Arrêtons-nous sur les points délicats de ce raisonnement. Bien que les transformations possibles de notre système se présentent en couples, à côté de chacune d'elles figurant son inverse, il n'en résulte pas que chacune d'elles soit aussi probable que son inverse. Cette conséquence ne serait légitime que si les transformations étaient en nombre fini, tandis qu'elles sont en nombre infini. L'irréversibilité apparaît comme un effet de moyennes dans une série de phénomènes individuellement réversibles. De ce côté, il n'y a rien à objecter.

Qu'on note, pourtant, le caractère de l'explication obtenue; à la représentation mécanique, elle ajoute le principe expérimental d'après lequel, dans un grand nombre de cas, la loi de la probabilité est vérifiée. Un tel principe implique, d'ailleurs, une égalité des conditions dans lesquelles ont lieu les

phénomènes élémentaires superposés dont on cherche l'effet moyen. Or, qui nous assure qu'une disposition primitive de notre mécanisme ne pourrait pas troubler cette égalité et rendre ainsi inapplicable la loi précédente? Boltzmann accorde qu'en ce point la théorie repose sur une hypothèse. Nous croyons qu'une détermination plus précise de celle-ci serait à désirer.

En tout cas, on ne peut méconnaître la valeur d'une démonstration qui se montre apte à approfondir l'étude des cas concrets, en construisant, par exemple, une théorie cinétique de la diffusion des gaz, illustrant ainsi mécaniquement un phénomène irréversible.

D'autre part, il n'y a pas lieu de se plaindre de ce que la théorie mécanique des transformations irréversibles laisse entrevoir comme possible, dans des conditions particulières, un renversement du cours naturel des phénomènes en contradiction avec le deuxième principe de la thermodynamique. Qui nous assure que le postulat de Clausius ne puisse subir quelques exceptions, par exemple dans les phénomènes de la vie?

Depuis sa découverte on remarque, en effet, chez les savants une répugnance manifeste à accepter ce principe comme une loi absolument générale de la nature. Ce sentiment tient surtout aux conséquences destructives qui semblent en résulter pour la vie universelle de l'Univers. Mais, le principe dont il s'agit, établi comme vrai dans le domaine de l'expérience, ne saurait recevoir une extension infinie à l'univers dans son ensemble. L'infinité du monde et de la matière pourrait donner lieu à des phénomènes où certains corps plus chauds se sépareraient des corps plus froids. C'est ce qui arriverait dans les hypothèses ingénieuses de Svante Arrhénius.

Immanquablement nous vient à l'esprit la conception du démon distributeur de l'énergie de Maxwell. En choisissant, dans un gaz, les molécules douées des plus grandes vitesses et en les séparant des autres, le démon pourrait élever la température d'une partie d'un gaz au détriment de l'autre, sans fournir aucun travail. Mais dans un domaine fini un tel phénomène semble exiger nécessairement une *force de sélection*.

Repoussant l'emploi d'un pareil moyen, G. Lippmann a proposé une expérience idéale dans laquelle, en partant comme hypothèse de la théorie cinétique des gaz, on réussirait à enlever de la chaleur à un gaz de température uniforme, en le plaçant dans un champ magnétique, ce qui permettrait de contredire le postulat de Clausius. Il s'agit d'utiliser les courants induits alternatifs, créés par le mouvement des charges électriques portées par les molécules, en tenant compte des petites différences dans la distribution de leur vitesse. A vrai dire, ces effets ne pourraient pas être rendus sensibles, et, par conséquent, ils ne constitueraient pas une contradiction effective du principe thermodynamique pris dans sa signification réelle, en temps que fait d'expérience. Mais, si nous ne nous abusons pas, on peut opposer au raisonnement de Lippmann une autre observation : un gaz à *température uniforme* admet toujours, dans la théorie cinétique, de très petites différences de températures en des points différents. Il semble donc que ces différences, en s'uniformisant progressivement, pourraient être employées comme chutes infinitésimales de température pour produire des effets de cet ordre, conformément au deuxième principe de la thermodynamique.

§ 16. La mécanique énergétique. — Nous pouvons

considérer les développements précédents sur l'élasticité et la chaleur comme une tentative de soumettre à une vérification plus large la mécanique newtonienne. La possibilité de cette vérification reste subordonnée à l'hypothèse de *mouvements cachés*. Nous verrons cette hypothèse prendre une extension plus grande dans les théories électromagnétiques, où l'on postule aussi des *masses cachées*.

Or, cette construction hypothétique d'un monde invisible, comparée aux faits d'expérience qu'elle veut expliquer comme conséquences des principes admis, arrive à prendre un caractère arbitraire d'autant plus illimité que les phénomènes irréversibles nous forcent à multiplier les mouvements cachés et à n'en considérer que les *effets moyens* suivant la loi des grands nombres.

Considérée sous ce point de vue, la physique prend un caractère de *limite* à l'égard de la mécanique dont la vérification arrive à faire complètement défaut, puisqu'on ouvre l'accès à *des modifications possibles des principes mécaniques*, de nature à être éliminées dans un calcul de moyennes. On peut encore exprimer la conclusion précédente en disant que l'explication mécanique des phénomènes contient des *hypothèses indifférentes* par rapport aux conséquences qui constituent les principes généraux des phénomènes.

La tendance à *éliminer les hypothèses indifférentes* vient justifier un développement inductif ultérieur de la mécanique, où les principes précédents sont pris comme prémisses générales à la place des principes newtoniens. On en rencontre précisément un exemple dans la construction de la mécanique énergétique créée par Helmholtz.

Admettons que l'on parte d'un mécanisme newtonien, c'est-à-dire d'un système de points en mouvement, entre lesquels interviennent des forces centrales; on peut alors définir une énergie potentielle et une énergie cinétique, qui, suivant les différentes représentations mécaniques, comportent un sens physique immédiat, en tant qu'elles se traduisent en quantités mesurables; et l'on peut poser les deux postulats fondamentaux suivants :

1° La somme des deux énergies, pour chaque système isolé, est constante (*principe de la conservation de l'énergie*);

2° La variation se fait de façon que la moyenne des différences entre l'une et l'autre énergie, pour chaque intervalle de temps, soit minima (*principe de Hamilton*).

La plus grande généralité de ces postulats vis-à-vis de la mécanique classique résulte des observations suivantes :

a) Chaque ordre de phénomènes, pour lequel il est possible de définir deux espèces d'énergie, qu'on peut distinguer en cinétique et potentielle, de sorte que les conditions 1 et 2 soient satisfaites, admet *une et par conséquent aussi un nombre infini d'explications mécaniques* (Poincaré).

b) On peut aussi faire correspondre à une explication énergétique d'un ordre de phénomènes un mécanisme hypothétique pour lequel ne soient plus valables les principes fondamentaux de la dynamique.

Cependant il importe de remarquer que l'explication mécanique conforme à la dynamique classique peut être considérée comme une explication énergétique, sous la seule condition que les forces admettent un potentiel, c'est-à-dire que le principe des forces vives soit respecté (Liv. II § 28).

L'Energétique est donc une mécanique plus générale, quand on exclut le cas des forces sans potentiel. On

peut considérer le cas où les phénomènes n'obéissent pas à la conservation de l'énergie, comme un artifice ayant pour but de délimiter une mécanique restreinte de systèmes incomplets et de remplacer, dans celle-ci, ce qui n'est pas dû à des formes d'énergie proprement mécaniques.

§ 17. **Matière et énergie.** — La mécanique énergétique comme la mécanique classique se heurte à la difficulté de rendre compte des phénomènes irréversibles; et, si elle veut éliminer les considérations de moyennes et de passages à la limite, elle est forcée d'admettre des *formes d'énergie qualitativement différentes*, ce qui la conduit à admettre de nouveaux postulats sur leur transformation. C'est dans ce sens que procèdent, dans un but utilitaire, certains travaux récents de chimie physique.

Nous n'avons pas l'intention de les examiner. Qu'il nous suffise ici de comparer, sous différents aspects, les conceptions fondamentales de la mécanique énergétique et de la mécanique classique.

Nous avons déjà noté (Liv. II § 20) que la critique des circonstances déterminatrices du mouvement tend à distinguer :

1° Les propriétés *intérieures* du corps mobile auxquelles se rapportent les représentations qui conduisent au concept de *masse* ;

2° Les relations *extérieures*, c'est-à-dire le *champ de forces* dans lequel se meut le corps.

Les expressions « intérieur » et « extérieur » ont ici un sens relatif. Sont considérés comme éléments intérieurs, ceux qui sont fournis par des expériences directes *sur le corps*, — où d'autres corps jouent aussi un rôle (instruments, etc.) — mais qui restent indépendantes du mouvement qu'on se propose de déterminer; c'est-à-dire qui peuvent s'effectuer sur le corps indifféremment à l'état de repos ou de mouvement. On considère, par contre, comme extérieures au corps mobile les circonstances dont on peut constater l'action en portant dans le champ un autre corps quelconque de masse égale. C'est par abstraction que l'on envisage ces données, dans une certaine mesure indépendantes du corps mobile, comme extérieures à lui.

Or, nous avons déjà eu l'occasion de montrer que cette distinction schématique ne correspond qu'imparfaitement à la réalité, quand on envisage les faits dans leur plus grande généralité. D'un côté, la comparaison des masses de corps chimiquement irréductibles nous conduit à des expériences de mouvement dans lesquelles, au moins implicitement, les forces jouent un rôle. D'autre part, les champs de forces newtoniennes nous montrent déjà une dépendance de la force, que l'on peut considérer comme une donnée extérieure, vis-à-vis de la masse sur laquelle elle agit; et les phénomènes électriques, etc., nous révèlent une dépendance de la force vis-à-vis de l'état physique du corps mobile, c'est-à-dire vis-à-vis de ses propriétés qui, tout au moins dans une première intuition, se présentent comme intérieures.

La poursuite de telles considérations conduit naturellement à envisager comme factice la distinction *prise dans un sens général*, entre les propriétés intérieures et les rapports extérieurs d'un corps. Cette critique s'étend au concept de *matière* qui dérive de la distinction précédente.

L'attribution de certaines propriétés à une *substance* (matière) équivaut donc à reconnaître la connexion de certaines données phénoménales qu'on a fait correspondre abstraitement à un objet, le *corps*

matériel, surtout parce qu'il s'y rattache une certaine *localisation* et, par conséquent, une *disponibilité* des phénomènes en question; à ce point de vue, les corps *solides* ont une importance particulière parce qu'ils font l'office de récipients pour les *liquides* et pour les *gaz*.

Cette faculté de disposer de la matière correspond à une série d'*invariants* superposés, relatifs à des groupes de transformations physico-chimiques. La *masse* est un de ces invariants relatifs au groupe de toutes les transformations physico-chimiques. Certains *champs de forces* que nous rattachons à un corps, par exemple les attractions newtoniennes, ont aussi un sens relativement invariable. On exprime cette invariance en disant que, pour un corps *isolé*, la masse est constante, l'isolement étant une hypothèse factice qui traduit une abstraction sous une forme simplifiée.

A côté de ces invariants, et même plus générale qu'eux, se trouve l'*énergie*, c'est-à-dire la somme des différentes énergies d'un *système isolé*. L'énergie peut être définie, en vertu de ses différentes transformations possibles, par réduction à une forme d'énergie déterminée, par exemple à un *travail* qui correspond directement à un groupe déterminé de sensations tactilo-musculaires, et elle peut être ainsi évaluée plus exactement au moyen d'instruments appropriés.

L'école, qui a trouvé son propagandiste dans Ostwald, part précisément, comme point de vue fondamental, de ce que l'on peut considérer l'énergie comme un *objet* au même titre que la matière, et de ce même qu'on doit considérer celle-ci comme *une forme particulière d'énergie*.

Cette thèse a soulevé de hauts cris. On a parlé d'*immatérialité de la matière* et de *matérialisation de l'énergie*, comme si, sous ces vocables, se cachait un *fait* d'importance capitale, et l'on s'est réclamé du *sens commun*, subterfuge prudent pour celui qui veut s'épargner la critique des expressions scientifiques.

La vérité est que de telles expressions ne comportent aucune négation de faits et que l'énergétique ne veut aucunement *changer la réalité*, mais seulement *les images* que nous nous en formons, ou mieux les images que nous introduisons dans l'étude abstraite des phénomènes physiques, attendu que les intuitions que nous avons de la matière ne sont certainement pas bannies dans l'interprétation concrète de la théorie.

La critique du concept de matière qui est à la base de l'énergétique et la conception de l'énergie comme d'un objet, ne peuvent donner lieu à aucune objection justifiée. On peut seulement discuter sur la valeur de ces images à l'égard de celles que suggère l'idée de matière et particulièrement à l'égard des images *atomiques*. Les énergétistes considèrent comme absorbés dans le concept de l'énergie tous les invariants partiels qui se rattachent à la matière, et, en particulier, l'invariant de la masse; ils repoussent, d'autre part, toute interprétation atomistique.

Ces vues ne nous paraissent pas suffisamment justifiées, et il est remarquable que les récentes expériences de J. Perrin, établissant un lien entre les conceptions moléculaires et le mouvement brownien, aient ramené à l'atomisme le chef même des énergétistes, W. Ostwald.

§ 18. **Localisation et mouvement de l'énergie.** — Il y a, du reste, deux modes de représentation énergétiste des phénomènes. La première, qui correspond à des vues utilitaires partielles (surtout dans la chimie

physique récente), tend à faire abstraction des éléments visuels qui se rattachent aux *rapports locaux*, et essaie en somme de porter à son plus haut degré d'abstraction le type du modèle mécanique newtonien.

A l'encontre de cette représentation, il en est une autre dans le sens cartésien, qui trouve son expression dans les théories sur *la localisation et le mouvement de l'énergie*. Ici, l'énergie est, pour ainsi dire, matérialisée, puisqu'on l'assimile à un fluide de densité différente pour les différentes régions de l'espace, et que l'explication des phénomènes est réduite à l'explication du mouvement de ce fluide.

Ces images proviennent de la théorie de l'électricité (§ 21). Maxwell a, le premier, localisé l'énergie électrique dans les diélectriques et Poynting a relevé la simplicité avec laquelle celle-ci se meut. A une déformation près qui ne change pas le volume, le flux est normal au plan des forces électriques et magnétiques et proportionnellement à l'aire de leur parallélogramme.

Plus récemment, Volterra a proposé un mode de localisation de l'énergie newtonienne et élastique, et il en a décrit le mouvement : un vrai modèle optique des *migrations de l'énergie*. On ne saurait encore apprécier aujourd'hui la valeur positive de ces travaux spéculatifs. Ils nous fournissent, cependant, une intuition plus synthétique des différences entre les propriétés intérieures et extérieures de la matière, et, relativement à nos considérations, ils ont l'intérêt de montrer comment le dualisme entre la tendance cartésienne et newtonienne, que nous avons rattaché au contenu sensible des images, se poursuit encore dans le développement des conceptions énergétiques.

CHAPITRE IV

L'OPTIQUE ET L'ÉLECTROMAGNÉTISME

§ 19. **L'explication élastique des phénomènes optiques et électromagnétiques.** — Après les développements de la mécanique dans les théories générales de l'élasticité et de la chaleur, il faut en venir à ceux qui concernent la lumière, l'électricité et le magnétisme. C'est de ceux-ci que nous allons parler.

Cet ordre de phénomènes physiques se rattache au concept général de l'élasticité par deux points principaux :

1° La représentation de la lumière comme vibrations d'un milieu élastique (*théorie des ondulations* de Fresnel).

2° La représentation de Maxwell, qui fait du diélectrique interposé entre les corps électrisés un milieu élastique, dont les déformations produisent directement certaines pressions ou tensions perçues par nous sous forme d'actions électrostatiques.

La synthèse de ces deux points de vue a conduit Maxwell à fonder la *théorie électromagnétique* générale, qui comprend l'optique comme cas particulier.

§ 20. **L'optique.** — Sans entrer dans une théorie historique minutieuse, nous pouvons facilement nous rendre compte de la genèse des idées qui ont conduit à la théorie mécanique de la lumière. Il suffit de rappeler

1° L'analogie de certains phénomènes optiques et acoustiques entre eux et avec certains phénomènes mécaniques élémentaires (propagation rectiligne, lois de la réflexion, etc.);

2° La possibilité de donner une explication mécanique concrète du son, en recourant aux vibrations directement constatables des corps sonores;

3° Le fait fondamental que la lumière a une vitesse de propagation finie, bien que très grande.

Malgré ces analogies, Newton, auquel remonte la théorie mécanique du son (corrigée plus tard sur un seul point par Laplace), a fondé la première théorie optique sur une hypothèse essentiellement différente, sur l'*émission* d'une substance par les corps lumineux. Il n'est pas difficile d'en saisir la raison.

Comme il n'est pas possible d'expliquer les phénomènes lumineux par le mouvement de la matière qui tombe sous nos sens, l'hypothèse de l'émission vient combler la lacune par une hypothèse qui demande en quelque sorte un minimum d'abstraction et qui repose, d'un autre côté, sur quelques associations spontanées dont on trouve trace dans le langage courant. On doit ajouter que l'idée d'assimiler plus profondément la lumière au son au moyen d'une théorie ondulatoire, devait rencontrer à son origine, comme elle en a rencontré en effet, de sérieuses difficultés.

Quoi qu'il en soit, la théorie de l'émission atteignit, grâce à l'œuvre des continuateurs de Newton, un haut degré de perfection, et, au moyen d'un certain nombre d'hypothèses supplémentaires, conduisit Laplace à rendre compte des premières propriétés de la réflexion et de la réfraction.

Mais les progrès de l'étude expérimentale de ce dernier phénomène, et notamment la mesure de la

vitesse de la lumière dans les milieux diversement réfringents, se montraient inconciliables avec l'ensemble des hypothèses adoptées. Ils confirmaient, au contraire, la théorie rivale de celle de Newton, imaginée par Huyghens et développée par Young et par Fresnel.

Celle-ci, en relevant l'analogie entre le son et la lumière, tendait à représenter le phénomène lumineux comme une vibration d'un milieu élastique, l'éther, remplissant l'espace entier. Cette théorie se montrait toujours plus féconde, en arrivant, par exemple, à expliquer, avec Fresnel, les phénomènes de diffraction prévus par Poisson.

Le problème fondamental que Fresnel eut à résoudre consiste dans la construction d'un concept adéquat de l'élasticité hypothétique attribuée à l'éther. L'hypothèse la plus simple, qui consiste à assimiler l'éther à un milieu gazeux raréfié, se montre inconciliable avec les faits. Les phénomènes de polarisation et d'interférence, joints aux résultats des mesures d'intensité dans l'étude de la réflexion et de la réfraction, conduisent nécessairement à admettre que les *vibrations lumineuses sont transversales*. L'éther se présente alors comme doué d'une élasticité en un certain sens opposée à celle des gaz, qui transmettent des ondes longitudinales et non transversales, les courses des molécules ne rencontrant aucune résistance élastique.

Comment nous figurer un tel milieu? Si nous ne voulons pas nous éloigner des conditions habituelles d'un modèle mécanique, nous devons l'assimiler à un solide, en le dotant d'*incompressibilité*, ou lui attribuer une *compressibilité infinie*.

Cette seconde hypothèse est adoptée habituellement par Fresnel, tandis que F. Neumann et Mac-Cullagh ont développé une autre théorie, où l'on adopte systématiquement la première.

Les deux théories conduisent à supposer que, dans la lumière polarisée, la vibration d'une particule d'éther est respectivement perpendiculaire ou parallèle au plan de polarisation. Mais il semble difficile de décider entre les deux cas par l'expérience ; et même l'analyse de Poincaré tend à démontrer que leur différence est une hypothèse indifférente au moins dans l'optique des corps en repos.

A ne considérer que la facilité de la représentation, on se tient évidemment dans un domaine très suggestif. L'éther de Fresnel est un milieu élastique, complètement nouveau, qu'on ne réussit à imaginer que si l'on pense à un gaz dans lequel la viscosité jouerait le rôle de l'élasticité. L'hypothèse d'un éther solide nous offre plus difficilement une représentation des rapports entre l'éther et la matière, et nous oblige à postuler une force particulière (dite force de Kirchhoff) pour expliquer la variation de l'élasticité de l'éther sur les deux côtés d'une surface, qui sépare des milieux différemment réfringents.

Nous aurons l'occasion de voir plus tard comment on peut rendre compte de l'élasticité de l'éther, sous un nouveau point de vue, par des mouvements stationnaires (§ 24). Mais pour la nouvelle conception réapparaît aussi, dans la théorie de la lumière, la réciprocité d'explications que nous venons d'indiquer.

§ 21. **Electrostatique.** — Les tentatives d'une explication mécanique des phénomènes électromagnétiques peuvent se rattacher à deux vues fondamentales de Clerk Maxwell, que l'on devrait superposer et unir dans une théorie synthétique, mais dont l'accord serait difficile par suite d'une difficulté que l'auteur n'a pas réussi à vaincre complètement. En

recherchant et en critiquant les faits avec une puissance logique et avec une intuition remarquable des analogies dans les différents domaines de l'expérience, Maxwell a préféré juxtaposer plusieurs constructions partielles différentes, dans l'espérance que les contradictions apparentes disparaîtraient dans une vue plus synthétique des rapports physiques, plutôt que d'en sacrifier arbitrairement quelques-unes par esprit de composition systématique.

Un premier ordre d'analogies, qui constitue dans l'œuvre de Maxwell une théorie à part, est la *théorie élastique des actions électrostatiques*. De même que l'optique suggère la représentation d'un milieu élastique à travers lequel se transmettent les ondes lumineuses, l'attraction et la répulsion à distance entre des corps électrisés conduit Maxwell à supposer un milieu élastique *sui generis* interposé entre les conducteurs. Les pressions et les tensions du milieu se traduisent précisément dans les actions électriques, et cette représentation hypothétique trouve son fondement dans les expériences de Faraday, d'où résulte la fonction importante du diélectrique dans les phénomènes électriques

Comme on le voit, la tentative de Maxwell tend à réduire les forces s'exerçant à distance entre les corps à des forces s'exerçant par contiguïté, de proche en proche. Cependant le système d'images dans lequel se traduit cette idée directrice soulève de graves objections.

Beltrami a observé que les tensions qui se produisent dans le milieu de Maxwell ne remplissent pas les conditions différentielles qui sont généralement applicables aux *milieux élastiques*, si l'on admet comme propriété caractéristique de ceux-ci que l'état de tension produit par une déformation infinitésimale

dépend, pour chaque élément, de cette déformation et non de la succession des états par lesquels le corps a précédemment passé.

Ces objections n'empêchent pas la possibilité d'une explication élastique des actions électrostatiques, mais elles montrent qu'on ne peut la donner sous la forme simple proposée par Maxwell, où les tensions dépendent de l'état local des forces du champ. On peut, d'ailleurs, faire correspondre d'une autre façon à un champ de forces électriques, comme en général à tout champ de forces, une déformation bien déterminée d'un milieu élastique, maintenu en équilibre par ces forces. Dans ce sens, Somiglïana a résolu le problème de déterminer la déformation et l'état correspondant de tension qui conviennent à un milieu élastique capable d'expliquer les actions électrostatiques. Mais, ici, les tensions dépendent de tout le champ de forces donné.

§ 22. **L'électromagnétisme.** — Dans le traitement des phénomènes électromagnétiques, Maxwell a été guidé aussi par l'idée d'expliquer les forces à distance par des actions s'exerçant de proche en proche par contiguïté. Cherchons à interpréter, sans nous imposer des liens trop étroits, la pensée qui domine cette tentative.

Partons de l'analogie avec la théorie mécanique de la chaleur. Comme dans cette théorie on est conduit par les rapports de la chaleur et du travail à l'hypothèse que la chaleur correspond à un mouvement intestin des particules des corps, de même les faits de l'induction électromagnétique, qui rend possible une production de travail mécanique, suggèrent, par analogie, l'idée que l'énergie électromagnétique est une forme de mouvement.

Maxwell insiste particulièrement sur l'analogie entre les phénomènes de self-induction des courants et les forces d'inertie, pour en tirer l'idée qu'aux courants correspond quelque chose qui se meut. Mais comme ces phénomènes dépendent de la forme du circuit et du milieu ambiant, il rejette l'hypothèse que ce qui se meut soit de l'électricité à l'intérieur des fils conducteurs. Une intuition conforme à l'esprit synthétique de Faraday lui suggère, par contre, l'idée du mouvement d'un fluide qui remplit le diélectrique ambiant. Il s'agit d'expliquer avec une pareille hypothèse les phénomènes d'induction électromagnétique. C'est précisément le but de la théorie que Maxwell développe dans la quatrième partie de son traité d'électricité et de magnétisme. L'explication est obtenue dans le sens de la mécanique énergétique (§ 16), qui trouve ici, pour la première fois, une importante application concrète.

Exposons les principes directeurs de la théorie de Maxwell, en nous référant, pour plus de simplicité, au cas de l'électromagnétisme des corps en repos dans un milieu homogène. Dans l'impossibilité où l'on est de déterminer le mécanisme caché qui correspond aux faits visibles, on peut cependant exprimer avec le principe d'Hamilton les relations qui existent entre deux formes d'énergie données par l'expérience; entre l'*énergie électrique* que l'on peut considérer (indépendamment des hypothèses particulières du paragraphe précédent) comme *énergie potentielle*, et l'*énergie électromagnétique* que l'on peut considérer comme *énergie cinétique* ou force vive. La théorie électrostatique fait connaître l'expression de la première énergie en fonction des charges électriques, des distances, etc.; Maxwell a recherché de quelle façon la seconde énergie dépend de l'intensité du courant

électrique et des rapports géométriques du circuit.

Or, *les rapports énergétiques précédents représentent bien les faits de l'induction électromagnétique.*

En partant d'eux, on passe ensuite naturellement aux *équations d'un champ électromagnétique*, qui expriment que l'état futur du champ est déterminé par l'état actuel, et où figurent différents éléments liés entre eux qui entrent dans les combinaisons intégrales représentant les deux énergies en question.

Le contenu positif de ces équations sera particulièrement éclairci par Hertz et Lévi-Civita.

Il ne ressort pas des développements de Maxwell une représentation adéquate du mécanisme caché des phénomènes électromagnétiques, mais seulement le schéma d'un milieu qui, *grosso modo*, peut être représenté comme un *système cellulaire contenant un fluide*. Le mouvement du fluide correspond à l'énergie électromagnétique et les réactions élastiques, c'est-à-dire les pressions et tensions déterminées par ce mouvement dans les parois des cellules, donnent lieu à l'énergie électrostatique.

Nous avons déjà remarqué que l'importance de ce schéma réside dans la relation qu'il établit entre les différents phénomènes électromagnétiques et, notamment, entre les phénomènes d'induction. Il devient possible de poursuivre ainsi la vision imaginative de ces phénomènes au delà du champ de l'expérience. C'est précisément ce qui a conduit Maxwell à sa plus importante découverte.

Il a remarqué que les oscillations électromagnétiques périodiques extrêmement rapides devaient produire des phénomènes analogues à ceux de la lumière. Les ondes lumineuses peuvent donc être considérées comme un cas particulier de ces oscillations, correspondant à une longueur d'ondes extrêmement petite.

Ces vues théoriques ne reçoivent, dans l'œuvre de Maxwell, qu'une confirmation limitée. La plus saillante est la découverte que la vitesse de la lumière est sensiblement égale au rapport des deux unités des quantités électriques dans les systèmes de mesure électrostatique et électromagnétique. La comparaison entre les propriétés optiques et électriques des corps donne des résultats moins satisfaisants, si l'on demande des accords quantitatifs un peu plus précis.

Vingt ans plus tard, Hertz réalisait expérimentalement les oscillations électriques, et, quand on eut ainsi mesuré leur vitesse de propagation, elle fut trouvée, conformément à la prévision théorique, égale à celle de la lumière. A partir de ce jour, de nouvelles analogies entre les phénomènes optiques et électromagnétiques se sont révélées en grand nombre; par exemple, on a répété avec les ondes électromagnétiques les différentes expériences sur la réflexion, la réfraction, etc., grâce en particulier aux travaux de Righi. On peut ainsi dire que le concept général de la théorie électromagnétique de la lumière constitue, dorénavant, une acquisition certaine de la science.

§ 23. **Le contenu positif de la théorie de Maxwell.** — Dans l'œuvre de Maxwell, on distingue différentes constructions partielles qui tendent, d'une part, à une représentation mécanique des phénomènes électromagnétiques et électro-optiques, qui aboutissent, de l'autre, à la synthèse de différentes données phénoménales, exprimée par les équations d'un champ électromagnétique. Dans ces équations figurent des

éléments d'ordres différents, c'est-à-dire des données relatives au modèle mécanique à côté de données définies par des expériences possibles. D'où la nécessité d'un travail critique tendant à reconnaître le contenu positif de la théorie de Maxwell. Une telle critique a conduit précisément Heaviside et Hertz à transformer et à simplifier les équations de Maxwell.

Hertz surtout, en faisant abstraction de l'extension de ces équations à des milieux cristallins anisotropes, a le mérite d'avoir expliqué lucidement le sens de ces équations dans deux mémoires classiques, consacrés respectivement à l'électromagnétisme des corps *en repos* et des corps *en mouvement*. Nous nous reporterons, ici, au premier cas.

Admettons que soient donnés, dans un milieu homogène ou dans le vide, plusieurs corps immobiles, sièges de phénomènes électriques et électromagnétiques. Un *champ électromagnétique* est ainsi défini, c'est-à-dire qu'en chaque point deux vecteurs sont définis en fonction du temps : la force *électrique* et la force *magnétique*. La force électrique est la force qui s'exercerait, en chaque point du champ, sur l'unité de masse électrique qui y serait transportée. Elle est ainsi définie indépendamment de la distinction des forces d'*origine électromagnétique* et *électrostatique*, dont elle représente la résultante. La force magnétique est définie d'une façon tout à fait analogue. Ces définitions ont un sens positif, par rapport à des expériences possibles, mise à part la difficulté pratique de mesurer la force électrique dans les unités électrostatiques.

La connaissance du champ des forces électrique et magnétique détermine complètement le cours des phénomènes et en particulier des phénomènes électrodynamiques, indépendamment de la connaissance des corps électrisés, des courants et des aimants qui ont servi à définir le champ. C'est ce qui a lieu, grâce à une *hypothèse fondamentale*, généralement considérée comme une généralisation de la loi d'Ohm, qui est vérifiée pour les phénomènes permanents : le courant électrique dans un conducteur est vectoriellement proportionnel, pour chaque point, à la force électrique qui s'y exerce.

Le champ électrique et le champ magnétique sont dans une étroite dépendance l'un vis-à-vis de l'autre. Hertz admet, sans plus, que les équations qui expriment une telle dépendance et qui se rapportent à un milieu non conducteur, homogène et isotrope, peuvent se traduire de la façon suivante :

1° La variation de la force magnétique par rapport au temps est proportionnelle au *curl* de la force électrique;

2° La variation de la force électrique est, réciproquement, proportionnelle au *curl* de la force magnétique.

Si le champ est un conducteur, cette seconde loi est modifiée en ce que, à la variation de la force, s'ajoute celle due au courant, qui est, comme nous l'avons vu, proportionnelle à la force même.

Les équations ainsi obtenues, auxquelles était arrivé également Heaviside, en transformant et en simplifiant celles de Maxwell, déterminent la connaissance du champ électromagnétique, quand son état actuel est donné. Elles nous disent, en effet, comment chaque perturbation électromagnétique locale se propage dans l'espace et dans le temps.

Aux équations du champ électromagnétique, il n'y a plus qu'à ajouter les équations de conditions qui expriment la *conservation de l'électricité* et du *magné-*

tisme, dont la première sert à distinguer l'éther de la matière. On peut alors interpréter ces équations et en déduire, comme Hertz nous le montre, les lois physiques connues : en premier lieu, celles qui sont relatives à un régime permanent, par exemple la loi d'Ohm pour les circuits fermés, les principes de Kirchhoff pour les conducteurs en dérivation, la règle d'Ampère, la loi de Biot et Savart, puis les lois de l'induction que l'expérience nous fait connaître pour les circuits fermés, etc.

La vérification des conséquences tirées des équations du champ électromagnétique justifie, selon Hertz, ces équations qu'on a introduites à titre d'hypothèses fondamentales de la théorie. Mais, pour que la vérification apparaisse vraiment comme une démonstration des hypothèses, il convient d'établir que celles-ci peuvent se déduire à leur tour de quelques-unes des lois physiques soumises à l'expérience. C'est ce qu'a fait précisément T. Lévi-Civita. En reprenant la théorie de Helmholtz et en la corrigeant par l'hypothèse d'un temps fini de propagation des actions à distance, il a montré qu'elle conduit aux équations de Hertz.

Expliquons plus précisément cet important résultat. Admettons :

1° Comme valable le principe de la *conservation de l'électricité*, et, par conséquent, que l'on puisse se représenter la variation d'un champ électromagnétique comme le mouvement d'un fluide qui subit une condensation aux endroits où se trouve la matière;

2° Comme valables les lois sur l'action électrostatique de Coulomb, sur l'action électromagnétique de Biot et Savart et sur l'induction électro-magnétique de Neumann, corrigée par l'introduction d'une vitesse de propagation proportionnelle à celle de la lumière;

On peut alors calculer, pour chaque point du champ, la force électrique qui résulte des deux composantes d'origine électrostatique et électrodynamique, et la force magnétique donnée par la loi de Biot et de Savart; ces deux forces sont liées, pour chaque milieu homogène et isotrope en repos, par les équations de Hertz.

Nous pouvons donc conclure : les développements de Hertz et Lévi-Civita mettent en lumière le contenu positif de la théorie électromagnétique de Maxwell; pour des milieux homogènes et isotropes en repos, cette hypothèse équivaut à l'ensemble du principe de la conservation de l'électricité et des lois de Coulomb, de Biot-Savart et de F. Neumann, corrigée par l'hypothèse d'un temps fini de propagation des actions à distance.

§ 24. **L'élasticité considérée comme mouvement.** — Tandis que la critique positive de la théorie de Maxwell conduit à éliminer des équations du champ toute distinction entre les forces électriques d'origine électrostatique et électromagnétique, les spéculations autour du modèle mécanique des phénomènes tendent aussi, d'un autre côté, à supprimer cette distinction.

Maxwell avait considéré les forces électrostatiques comme de *vraies forces élastiques* et les forces électromagnétiques comme des *forces d'inertie*, ou forces *apparentes*, dues à des *mouvements cachés;* un développement de la représentation mécanique dans le sens cartésien conduit à considérer aussi les actions électrostatiques comme l'effet de mouvements cachés et, d'une façon générale, à expliquer l'*élasticité comme une forme de mouvement.*

Cette idée s'est présentée pour la première fois à

Mac-Cullagh (1839) qui, dans l'explication des propriétés optiques des cristaux, fut conduit à imaginer l'éther lumineux non plus comme un milieu élastique proprement dit, mais comme un milieu où se passent certains mouvements stationnaires qui simulent une *élasticité de rotation*. Fitz-Gérald remarqua combien ce modèle est propre à concilier la représentation des phénomènes optiques avec les phénomènes électromagnétiques, et les difficultés de figuration furent écartées par W. Thomson grâce au modèle concret d'un *éther gyrostatique*.

Le fondement de cette construction repose sur la permanence des axes de rotation, qu'on observe dans le gyroscope. Avec quatre gyroscopes articulés, en losange, on peut composer un système qui simule l'élasticité d'un ressort; si à tout le système on imprime une rotation, l'axe oppose une résistance au déplacement de sa direction. Si donc l'on réunit une infinité de systèmes élémentaires ainsi formés, on obtient le modèle d'un éther capable de représenter la rotation du plan de polarisation de la lumière dans un champ magnétique (phénomène observé par Faraday).

Un développement ultérieur de son idée figurative conduisit Thomson à imaginer un *modèle hydrokinétique* des actions électrodynamiques, dans lequel l'impénétrabilité et l'inertie de la matière, où s'effectuent des mouvements stationnaires, produisent des forces apparentes, analogues aux actions ampériennes des courants.

A côté de ce modèle, il faut citer celui de C.-A. Bjerknes pour les actions électrostatiques ou newtoniennes, dans lequel ces actions se produisent comme effets du mouvement vibratoire de *sphères pulsantes* dans un liquide. Mais il arrive, ici, que les actions

simulées sont inverses des actions réelles : Poincaré a montré comment cette inversion peut être écartée en modifiant l'interprétation du modèle. Une seconde difficulté consiste en ce que Bjerknes a dû admettre que les sphères pulsantes ont des mouvements de même période et de mêmes phases (ou de phases qui ne diffèrent que pour π), ce qui paraît inadmissible. On peut écarter cette nouvelle difficulté, en supposant un mouvement de dilatation et de contraction des sphères continu au lieu d'un mouvement alternatif. Ce cas correspond précisément à la représentation d'une particule électrisée, quand on admet une généralisation de l'optique de Fresnel, adaptée aux phénomènes électromagnétiques, c'est-à-dire une théorie en quelque sorte réciproque de celle construite récemment par Larmor comme extension de l'optique de Mac-Cullagh et Neumann.

Tandis que ces spéculations tendent à représenter d'une façon concrète les forces électriques comme des forces d'inertie, Hertz fut conduit à imaginer qu'une explication analogue doit être valable, en général, pour toutes les forces, c'est-à-dire qu'on peut toujours remplacer celles-ci par des *mouvements cachés de masses liées*. Dans sa mécanique posthume, il a précisément donné la justification abstraite de ce point de vue, en traçant le plan d'une mécanique d'où tout concept de force est banni.

Son hypothèse fondamentale consiste dans l'existence de masses invisibles liées à la matière visible de façon à ce que chaque phénomène, et, en particulier, chaque mouvement de la matière visible, entraîne en général un mouvement de la matière invisible : la loi du mouvement se réduit alors à une *généralisation du principe d'inertie de Galilée et de Newton*.

Chaque système isolé se meut de façon que la succession de ses positions réponde à une condition de minimum, qui peut être exprimée par le *principe du moindre effort de Gauss*, analogue à la condition que remplit la droite parmi toutes les trajectoires possibles d'un point dans l'espace, et la géodésique parmi toutes les trajectoires possibles d'un point sur une surface. Les *forces* apparentes ne sont que les *réactions des liaisons*.

Le schéma ébauché par Hertz n'a pas été appliqué par lui à des problèmes déterminés, où l'on verrait en quel sens et de quelle façon on peut résoudre convenablement l'arbitraire qui subsiste dans le choix des mouvements cachés et quel parti on peut tirer de cette hypothèse pour l'explication des phénomènes.

Mais les représentations mécaniques de l'électromagnétisme citées plus haut, par exemple le modèle de Bjerknes, peuvent être prises comme illustrations du programme de Hertz.

On peut considérer, d'autre part, que les différents développements de la mécanique et de la physique, analysés jusqu'ici, tendent, en général, à réduire les forces au type élastique; si donc l'on veut réaliser l'idée de Hertz, il faut considérer complètement, suivant les vues de Thomson, l'élasticité comme un mouvement.

§ 25. **L'électromagnétisme des corps en mouvement : la théorie de Hertz.** — La tentative d'expliquer mécaniquement les phénomènes électromagnétiques aboutit à un modèle du type cartésien qui, considéré théoriquement, est général et parfait, bien qu'on ne l'ait pas encore développé adéquatement d'une façon concrète. Mais les spéculations autour de

ce mécanisme caché restent par trop éloignées des applications concrètes de la théorie, qui a, comme nous l'avons vu, un contenu indépendant de ses fondements mécaniques.

S'il s'agit de poursuivre ces applications, de perfectionner et d'étendre le modèle électrique des phénomènes optiques, on peut partir des forces électriques comme des données primitives, sans se préoccuper de leur réduction possible. C'est, précisément, le cas des équations de Hertz que nous avons considérées dans le paragraphe 23, en nous bornant à l'électromagnétisme des corps en repos. C'est encore le cas des récentes théories auxquelles a conduit la tentative de coordonner les différents phénomènes électromagnétiques des corps en mouvement, et, en particulier, de la théorie de Lorentz.

Nous rendrons brièvement compte de ces théories, en laissant de côté les travaux de Maxwell qui les ont précédées. Nous prendrons pour point de départ la théorie de Hertz sur l'électromagnétisme des corps en mouvement, en cherchant l'origine de l'idée directrice qui l'inspire.

Si nous considérons un milieu indéformable en repos (ou considéré comme tel), et que nous déterminions en lui un champ électromagnétique au moyen de corps immobiles électrisés, magnétiques ou parcourus par des courants, nous trouverons qu'en chaque point les forces électriques et magnétiques sont liées par les équations différentielles dont on a analysé le contenu au paragraphe 23. On peut généraliser ces équations en deux sens.

En premier lieu, on peut admettre qu'elles sont valables même si *le champ électrique est produit par des corps qui se meuvent d'une façon quelconque dans un milieu donné*. Par exemple, un corps électrisé en

mouvement donnera lieu, en chaque point, à une variation progressive de la force électrique et, par conséquent, à une perturbation tout à fait analogue à celle créée par un courant, ce qui est d'accord avec les expériences de Rowland, qui assimile les courants électriques par *convection* aux courants par *conduction* ou voltaïques.

En second lieu, si les phénomènes se propagent dans des milieux différents qui se meuvent les uns par rapport aux autres, on peut admettre qu'il existe entre eux une *indépendance relative*, c'est-à-dire considérer qu'on ait en chacun d'eux un champ électromagnétique propre, défini par les équations de Hertz, *prises relativement au milieu donné*.

Hertz accepte précisément cette hypothèse, en la complétant pour le cas des *milieux* matériels *déformables*. On est facilement conduit à cette généralisation par les considérations suivantes.

On peut déduire des équations différentielles, qui se rapportent à un milieu indéformable, des *lois intégrales* (dont l'une fut déterminée par Maxwell) exprimant la variation du flux de force électrique ou magnétique à travers une surface fermée, respectivement par le flux de la force magnétique ou électrique le long du contour. Hertz accepte comme hypothèse fondamentale *que ces lois sont valables pour un milieu en mouvement par rapport à lui, c'est-à-dire par rapport à des circuits matérialisés, qui se déforment avec le milieu*.

La théorie de Hertz est présentée par son auteur comme un ensemble d'hypothèses, compatibles avec un petit nombre d'expériences sur le transport des corps électrisés et sur les effets d'induction du mouvement des circuits traversés par des courants ; et il remarque lui-même que, dans ces expériences, il

s'agit toujours de mouvements ayant de faibles vitesses par rapport à celle de la lumière.

La nécessité d'une correction résulte des phénomènes optiques qui se passent dans les corps en mouvement, et notamment de l'*aberration astronomique*.

Soit B, un milieu impolarisable, A une source d'ondes électromagnétiques ou lumineuses, et admettons, pour fixer les idées, que A soit à une grande distance de B, si bien que l'on puisse considérer les ondes comme planes. B pourra représenter notre atmosphère et A une étoile. Par hypothèse, B se déplace par rapport à A.

Si l'on tient compte des équations aux limites dans le passage du milieu A au milieu B, la théorie de Hertz conduit à admettre que les ondes émises par A sont captées par B et entraînées par son mouvement, tout en conservant en B le caractère d'ondes planes. Il en résulte que la vitesse relative de propagation en B est la même vitesse V que si B était en repos par rapport en A.

Cette conséquence est en désaccord avec l'aberration de la lumière, connue depuis Bradley. En effet, l'aberration implique que la lumière, provenant de l'étoile A, continue à se mouvoir dans l'atmosphère B avec la même vitesse V *par rapport à A* et, par conséquent (en désignant par v la vitesse de la terre) avec une vitesse $V - v$ par rapport à la terre.

Pour expliquer l'aberration astronomique, on peut remplacer le principe de Hertz, qui exprime une *relativité locale* des phénomènes électromagnétiques, par un *principe de relativité généralisé* qui s'harmonise avec le point de vue synthétique de Faraday et de Maxwell.

Considérons, pour plus de simplicité, un milieu uniforme B, qui se meut par rapport à A, siège de

phénomènes électromagnétiques. On peut admettre que, pour un observateur intérieur à B et entraîné dans son mouvement, les phénomènes se présentent comme si le milieu B s'étendait jusqu'à comprendre A.

Pour justifier une telle hypothèse, il suffit de se représenter les phénomènes électromagnétiques comme les perturbations d'un éther défini par des *points singuliers*, qui correspondent aux charges électriques portées par A. On peut s'expliquer alors simplement la propagation des perturbations avec le mouvement de A par rapport à B, en admettant que l'éther est entraîné dans le mouvement de A par rapport à B.

On peut exprimer la même hypothèse en considérant l'éther comme immobile avec A, et B en mouvement. Si A est une étoile, B la terre, v la vitesse de B par rapport à A, V la vitesse de propagation de la lumière dans un milieu comme notre atmosphère, on trouve alors que la lumière provenant de l'étoile se propage dans l'atmosphère terrestre avec la vitesse $V-v$. C'est ainsi qu'on explique l'aberration, suivant les vues de Fresnel, dans la théorie ondulatoire. Mais l'explication n'est valable que pour le cas élémentaire observé par Bradley.

Les astronomes de Greenwich ont mesuré l'aberration avec un télescope rempli d'eau. La différence de la vitesse de propagation des ondes lumineuses dans l'eau devrait conduire ici à un angle d'aberration différent ; or, l'angle ne varie pas.

Ce résultat fut interprété par Fresnel dans le sens d'un entraînement partiel de l'éther par l'eau. *L'entraînement partiel des ondes lumineuses* dans la matière en mouvement fut plus tard confirmé par les expériences de Fizeau, récemment reprises par d'autres expérimentateurs : le mouvement de l'eau

donne lieu à un déplacement des franges produites par l'interférence de deux rayons lumineux.

Il en résulte que les expériences plus étendues qui se rapportent aux phénomènes optiques et électromagnétiques des corps en mouvement ne peuvent être davantage expliquées par une *hypothèse de relativité généralisée*, comme celle que nous avons énoncée plus haut. Ces phénomènes dépendent du mouvement relatif des corps, de la vitesse de propagation dans le milieu où ils sont constatés, et de *quelque chose d'autre* : en s'en rapportant à l'expérience, des propriétés qualitatives de la matière qui constituent le milieu en question.

Il s'agit de construire une théorie apte à rendre compte des conditions complexes énoncées.

CHAPITRE V

LA THÉORIE DE LORENTZ ET LA MÉCANIQUE DE LA RELATIVITÉ

§ 26. **La théorie de Lorentz.** — La théorie de Lorentz (1892) a été construite dans ce but. Elle consiste essentiellement à attribuer l'entraînement partiel des ondes électromagnétiques, dans la matière en mouvement, à la modification du champ produit par les charges électriques qui seraient, par hypothèse, entraînées dans le mouvement de cette matière.

Pour fixer les idées, considérons un corps A supposé fixe par rapport à l'éther, et un corps B, qui se meut par rapport à A (et à l'éther). A l'intérieur de B se trouvent superposées deux séries de perturbations relatives à A et B. Ces dernières se propagent avec le mouvement de B, et le *résultat total équivaut à l'hypothèse d'un entraînement partiel de l'éther à l'intérieur de B*.

On peut généraliser ce cas, si l'on considère plusieurs corps A, B, C en mouvement relatif. On n'a plus de raison, alors, pour considérer l'un ou l'autre de ces corps, qui émettent les ondes électriques, comme fixe par rapport à l'éther. Pour vaincre cette difficulté, Lorentz postule un système de référence *absolu*, c'est-à-dire un éther indépendant de la matière, dont les parties ne varient pas les unes par rapport

aux autres, et il compare les mouvements des corps à cet éther pris comme immobile.

Ce postulat véritablement arbitraire donnera lieu à des conséquences que nous examinerons dans la suite. Pour le moment, tâchons de nous rendre compte de quelle façon la première hypothèse fondamentale est concrétisée par Lorentz dans un système d'images atomiques.

Dans l'ancienne théorie de Poisson, il y avait deux *fluides électriques*, l'un positif et l'autre négatif. Lorentz reprend en substance cette théorie ; mais il considère ces deux fluides comme constitués de particules matérielles (*électrons*), dont le transport constitue des courants. Il adopte sur les phénomènes magnétiques la théorie d'Ampère, qui les réduit à des courants électriques dans les particules des aimants. Les courants de conduction et le magnétisme ne sont donc plus, pour Lorentz, que des apparences, et il obtient ainsi une unification des différents phénomènes électromagnétiques.

Il est particulièrement intéressant de voir comment un rapprochement génial de faits différents conduit à réduire à un seul type les trois sortes de courants électriques, c'est-à-dire :

1° Les *courants voltaïques* dans les conducteurs ;

2° Les *courants électrolytiques* dans les gaz ou dans les liquides qui se décomposent ;

3° Les *courants de convection*, c'est-à-dire par transport de corps électrisés.

L'hypothèse unificatrice de Lorentz a pour base les considérations suivantes :

1° Les expériences de Rowland prouvent l'action des courants de convection sur le galvanomètre.

On peut expliquer les lois de Faraday sur l'électrolyse, comme Maxwell et Helmholtz le remarquaient

déjà, en admettant que les courants électrolytiques sont dus au transport de petites charges électriques invariables liées à certains groupements atomiques.

3° En particulier, les faits relatifs à la propagation électrique à travers les gaz conduisent à admettre une *dissociation électrique* ou *ionisation* de ceux-ci.

4° L'ionisation des gaz par les *rayons cathodiques*, émanés des tubes de Crookes, suggère l'idée que ces rayons sont des décharges d'électrons.

5° La perméabilité des métaux par les rayons cathodiques nous porte à supposer que les électrons peuvent se mouvoir librement dans les conducteurs, comme l'exige l'hypothèse que les courants voltaïques consistent dans le mouvement d'électrons.

Comment les vues de Lorentz nous offrent-elles un système d'hypothèses déterminées, traduisibles par les équations d'un champ électromagnétique?

Pour l'éther libre, il accepte, sans plus, les équations de Hertz. Il en est de même pour l'éther contenu dans la matière, où ne se trouve aucune particule électrisée, à part la nécessité de tenir compte des forces que les électrons exercent sur la matière même. Toute la difficulté consiste à trouver comment on doit modifier ces équations pour le champ intérieur à un électron, auquel on attribue des dimensions finies. Nous ne chercherons pas à élucider ce point, et nous nous bornerons à observer qu'il s'introduit ici quelques hypothèses qui ne sont justifiées *a priori* que partiellement, et que pourront confirmer indirectement, dans la suite, les conséquences qu'on en déduit.

Une fois les lois élémentaires des phénomènes déterminées, il ne reste plus qu'à les superposer pour en déduire les équations qui représentent, selon Lorentz, le champ électromagnétique plus général. Il y a donc lieu de tenir compte, pour chaque point, de *la moyenne* des effets produits par le mouvement des électrons.

On obtient ainsi une *théorie cinétique statistique du mouvement des électrons*, qui rappelle la théorie cinétique des gaz. Et l'important est que la théorie ne rend pas seulement compte des faits en vue desquels elle a été construite, mais qu'elle fournit une bonne explication des expériences de Faraday sur la rotation du plan de polarisation de la lumière dans un champ magnétique, et qu'elle conduit à prévoir de nouveaux rapports entre la lumière et le magnétisme, notamment la décomposition des raies du spectre dans un champ magnétique, vérifiée par Zeemann.

Il est vrai que de nouvelles expériences sur ce phénomène ont conduit à modifier en partie les prévisions et à compliquer les vues primitives de Lorentz; mais la découverte expérimentale, rationnellement déduite de la théorie, est toujours un succès pour celle-ci. Le succès est d'autant plus grand, dans le cas qui nous occupe, qu'il répond bien à un des desiderata de l'optique électromagnétique, qui est de découvrir de nouveaux rapports entre la lumière et l'électromagnétisme.

§ 27. **Critique : le principe d'action et de réaction.** — L'intérêt suscité par la théorie de Lorentz, son succès dans l'explication des faits connus et dans la prévision de faits nouveaux, ont attiré sur elle la critique des plus illustres savants et ont conduit à des tentatives plus étendues de la vérifier.

Au point de vue de la dynamique classique, la théorie de Lorentz a un grave défaut : *elle ne satisfait pas au principe newtonien d'action et de réaction*, où, tout au moins, le principe n'est plus satisfait, si on veut l'entendre de la seule façon qui ait un sens positif, c'est-à-dire *relativement à la matière*.

Il est facile de se rendre compte que cette conséquence résulte non pas tant des vues particulières de Lorentz, que du rôle que l'on fait jouer, suivant les idées de Maxwell, à l'éther, comme agent de propagation des actions qui s'exercent apparemment à distance.

Un corps frappé par la lumière subit une pression, déjà prévue par Maxwell et Bartholdi, puis vérifiée expérimentalement par Lebedeff; bien qu'il s'agisse d'expériences très délicates, le résultat en est d'autant plus plausible qu'il s'accorde avec les circonstances du mouvement des comètes qui avaient déjà conduit Faye à invoquer une hypothèse de ce genre. Or, la pression de Maxwell-Bartholdi ne se concilie pas avec le principe newtonien d'action et de réaction, parce que l'instant où la lumière envahit un corps ne coïncide pas avec celui où elle est émise par la source.

Il y a plus. Une analyse approfondie de Poincaré a mis en lumière que la violation de ce principe est nécessairement liée à toute théorie électromagnétique qui veut rendre compte de l'*entraînement partiel des ondes lumineuses*.

On arrive à bien comprendre cette nécessité, si on reprend un instant l'examen des hypothèses de Hertz. Entre deux corps électrisés A et B, en repos relatif, s'exercent des forces électrostatiques conformes au principe newtonien. Si A et B sont en mouvement, et si l'action se propage avec une vitesse finie, la force qui agit sur chaque point de A n'est plus dirigée vers les points de B dont elle émane. Mais, il s'introduit comme terme de correction, dans les équations de Hertz, l'action ampérienne entre les *éléments des courants* qui correspondent au mouvement de A et de B, et, ainsi, pour les actions totales le principe de Newton est satisfait.

Supposons, maintenant, que la propagation de la force, qui s'exerce de A sur B, soit modifiée par le mouvement d'un milieu qui accompagne B (c'est en substance l'hypothèse qui correspond à l'entraînement partiel des ondes lumineuses). Cela nous conduit à modifier la direction de la force totale qui agit sur B, c'est-à-dire à annuler cette compensation accidentelle qui avait lieu dans la théorie de Hertz : le principe newtonien d'action et de réaction ne subsiste plus.

Comme cette conclusion ne dérive pas tant des hypothèses particulières de Lorentz que des expériences de Fizeau, la chute du principe même s'impose comme un fait. Nous en discuterons plus loin les conséquences.

§ 28. **Le principe de relativité.** — Or, voici une circonstance plus grave, liée en apparence seulement à la précédente : la théorie de Lorentz laisse prévoir la possibilité de mettre en lumière *le mouvement de la matière par rapport à l'éther*, c'est-à-dire un véritable *mouvement absolu*, qui ne dépend pas des relations des corps entre eux.

On a discuté sur la possibilité d'une expérience vérificatrice. On a trouvé, tout d'abord, que, dans les expériences terrestres, les phénomènes lumineux ne permettent pas de déceler le mouvement de la terre dans un ordre d'approximation où l'on néglige le carré de l'aberration astronomique. Mais, comme nous le verrons, on a imaginé des expériences extraordinairement délicates dans lesquelles on aurait dû obtenir un résultat plus appréciable ; l'issue s'est trouvée négative.

A vrai dire, cela n'a provoqué nul étonnement ; mais il convient de se rendre compte des motifs qui conduisent à une aussi étrange prévision dans la théorie de Lorentz. On ne tardera pas à reconnaître que les

succès de la théorie ne conduisent vraiment pas, comme on pourrait le croire, à une présomption *a priori* en faveur de l'hypothèse que l'expérience a invalidée.

Lorentz a tiré son concept d' « électron » d'un rapprochement génial entre différents faits. La valeur de ses hypothèses dérive précisément des observations préliminaires qui y sont contenues. Mais, en rapportant les mouvements des électrons à un éther fixe, indépendant des corps, l'illustre physicien a suivi un critérium arbitraire, bien que commode pour le traitement mathématique. Or, c'est précisément cette hypothèse arbitraire, cette espèce d'absolu placé à la base de la théorie, qui se retrouve dans les déductions ultérieures. Celles-ci n'acquièrent de ce fait aucune créance plus grande pour avoir été rattachées à des origines dignes de considération.

Mais examinons les conséquences auxquelles on est conduit par le développement de la théorie.

Un système matériel S se meut par rapport à l'éther d'une translation par exemple uniforme. Deux points matériels électrisés A et B, liés à S, n'exercent plus entre eux une simple action électrostatique, mais crée deux courants dont l'action ampérienne diminue la première. A vrai dire, on devrait considérer cette diminution, dans un sens positif, comme inexistante, si elle ne dépendait pas de la position de A et B par rapport au sens de la translation ; car, dans ce cas, elle ne pourrait pas être mesurée par un observateur transporté dans le mouvement de S, mais seulement par un observateur qui pourrait faire des comparaisons avec ce qui se passe dans l'éther immobile. Mais l'action ampérienne dépend de la direction de la droite AB et devient ainsi virtuellement constatable par des expériences intérieures à S.

Une expérience optique de Michelson en 1881, répétée par le même expérimentateur avec Morley en 1887, répond précisément au problème posé par les conditions précédentes. Elle consiste schématiquement en ceci :

En S, sont donnés trois points A, B, C comme sommets d'un triangle isocèle, rectangle en A. AB est la direction du mouvement de translation de S, AC est perpendiculaire à celle-ci ; la vitesse de propagation de la lumière de A en B et de A en C doit alors être différente. L'expérience effectuée sur la terre, prise comme système S, ne laisse constater aucune différence. Or, le calcul montre que cette différence est de l'ordre du carré de l'aberration, et, par suite, qu'elle devrait être appréciable. Aussi a-t-on tiré de l'expérience de Michelson la confirmation du *principe de relativité : au moyen d'expériences optiques et électromagnétiques intérieures à un système en mouvement, il est impossible de déceler le mouvement de translation de celui-ci par rapport à l'éther.*

Pour expliquer un tel résultat négatif, Lorentz et Fitzgerald ont admis l'hypothèse de la contraction des corps dans le sens de leur mouvement ; si bien que les distances AB et AC, qui dans l'expérience *apparaissent* égales, doivent être considérées, *en réalité* (c'est-à-dire par rapport à l'éther), comme différentes.

Pour rendre plausible cette contraction (qui sur la terre est de l'ordre du carré de l'aberration), et pour obtenir une explication complète du principe de relativité (au moins dans le cas d'une translation uniforme), on a eu recours à d'autres hypothèses ; on a supposé que les forces moléculaires, dont dépendent, en définitive, les dimensions des corps, sont d'origine électromagnétique ; que la matière même est compo-

sée d'électrons (§ 31); et que ceux-ci, au lieu de conserver une forme sphérique invariable, comme dans l'hypothèse primitive d'Abraham, subissent une contraction, comme si l'éther pressait sur eux, et se réduisent ainsi à des ellipsoïdes aplatis, soit en conservant le même volume (Bücherer, Langevin), soit en conservant deux axes égaux (Lorentz).

Cette dernière hypothèse est vraiment la seule qui, combinée aux précédentes, rende compte du principe de relativité, et se justifie, selon Poincaré, en admettant que l'éther exerce sur l'électron déformable et compressible une pression constante, dont le travail est proportionnel aux variations du volume.

Les hypothèses précédentes amènent une transformation radicale de la dynamique classique, qui est remplacée par une *dynamique électrique*, dont nous parlerons plus loin. Nous nous bornerons à résumer ici le résultat auquel on est conduit dans la question qui nous occupe.

Le principe de relativité pour les phénomènes électromagnétiques peut être expliqué, dans la théorie de Lorentz, au moyen des hypothèses et des considérations suivantes :

1° Les corps sont formés d'*électrons* qui se *contractent* dans une translation, en se réduisant à des ellipsoïdes aplatis, par suite d'une *pression de l'éther*, dont le travail est proportionnel à la variation de volume de l'électron;

2° Toutes les *forces* sont d'*origine électromagnétique*,

3° Les *mesures* effectuées dans un système en mouvement sont *relatives* aux dimensions des instruments, aux forces prises comme termes de comparaison, et au *temps local*.

Soit t le *temps vrai*, défini par rapport à un observateur fixe lié à l'éther. Un observateur entraîné par le mouvement de la matière, qui communique avec le premier au moyen de signaux optiques (ou électromagnétiques, etc.) adopte une mesure du temps τ, où $\tau = at + b$ (Cf. Liv. II, § 8); a et b étant des *constantes locales*, dépendantes, la première de la vitesse de translation (supposée uniforme), la seconde de la distance de l'observateur mobile à l'observateur fixe.

La théorie exige que l'on considère τ comme correspondant aux indications des horloges fixées en S, étant donné que l'accord des différentes horloges s'établit en S, comme si le temps employé par la lumière pour aller d'un point A à un point B était indépendant de la direction du segment AB, ce qui n'est pas exact pour le temps vrai d'après l'hypothèse de Lorentz.

§ 29. **La relativité selon Einstein : la relativité du temps.** — Le contenu positif de la théorie de Lorentz, en tant qu'explication du principe de relativité par rapport aux phénomènes électromagnétiques, a été mis en lumière par l'analyse d'Einstein.

D'après Einstein, on postulera d'abord le principe même de relativité en admettant d'une façon générale que :

Etant donnés plusieurs corps doués d'un mouvement de translation relatif, aucune expérience effective (où l'on opère sur de la matière) ne saurait établir un critère permettant de reconnaître lequel de ces corps doit être considéré comme fixe par rapport à un repère naturel.

Ceci posé, Einstein analyse les hypothèses cinématiques concernant la propagation de la lumière entre deux points matériels A et B, qui sont en mouvement de translation uniforme l'un par rapport à l'autre. En

désignant par v la vitesse de B par rapport à A, et par c la vitesse de la lumière entre deux points invariables, on peut établir deux hypothèses simples en accord avec le principe de relativité :

1. La vitesse de propagation de A par rapport à B est $c + v$ (loi de la composition des vitesses de Galilée).

2. Cette vitesse est constamment c.

Einstein interprète l'expérience de Michelson en ce sens qu'il faut remplacer la loi de la composition des vitesses de Galilée par une nouvelle loi qui s'accorde avec l'hypothèse 2 :

La nouvelle loi de composition des vitesses, supposée par Einstein, est représentée par la formule $(u + v)$ $(1 + uv)$ où la vitesse de la lumière est prise comme unité : $c = 1$.

Il y a lieu, d'ailleurs, de fixer le sens exact des mesures de longueur et de temps (vitesses) qui entrent en jeu, en se rapportant à des *unités naturelles*, telles que la *longueur d'onde* d'une radiation déterminée et sa *période*. Nous verrons, dans un instant, ce que cette convention comporte.

En adoptant les hypothèses fondamentales d'Einstein, on peut expliquer très simplement, d'après Laüe, l'entraînement des ondes lumineuses reconnu par les expériences de Fizeau : cet entraînement qui paraissait *partiel* d'après les lois de la cinématique de Galilée, est *total* d'après la cinématique d'Einstein, c'est-à-dire que le mouvement de la lumière et celui du milieu s'ajoutent tout simplement suivant la loi de composition indiquée.

Mais il convient d'examiner de plus près le sens des hypothèses d'Einstein et la relativité plus profonde qu'elles introduisent dans les conceptions habituelles.

Einstein n'admet pas *a priori* la possibilité du transport d'une longueur invariable ; lorsqu'il s'agit de longueurs appartenant à deux systèmes A et B, en mouvement relatif, la comparaison se fait en se rapportant aux unités naturelles locales, ou à l'aide de signaux optiques. Les rapports établis ainsi ne conduisent pas au même résultat ; deux longueurs, *égales* par rapport aux unités naturelles, semblent *inégales* à celui qui les observe de A ou de B. En désignant par v la vitesse relative et par 1 la vitesse de la lumière, toute longueur de B, par rapport à un observateur en A, paraît raccourcie dans le rapport

$$\sqrt{1 - v^2}$$

et réciproquement.

C'est la *contraction de Lorentz* qui, dans la théorie d'Einstein, se réduit à une *apparence du mouvement relatif*.

Mais il y a plus. *D'après les hypothèses d'Einstein, la construction même de l'ordre temporel devient essentiellement relative au lieu.*

On arrive à cette conséquence paradoxale en considérant plusieurs systèmes en mouvement relatif A, B, C, D. Un observateur, situé en A, observe C et D, et, en tenant compte du temps de propagation, juge que deux événements se déroulent en C, D *au même instant*. Eh bien, ces événements *contemporains par rapport* à A, apparaissent successifs pour un observateur situé en B.

Telles sont les principales conséquences de la théorie d'Einstein, dont Minkowsky a fourni un modèle élégant par la géométrie de l'espace à quatre dimensions.

Ce qui frappe d'abord dans le système d'Einstein, c'est que, par une simple modification portant sur les principes de la cinématique, on puisse rendre compte

des faits les plus saillants de l'optique de Lorentz, en éliminant tout recours à des hypothèses métaphysiques.

Néanmoins, des physiciens éminents pensent que le développement des idées d'Einstein ne mènerait pas si loin lorsqu'il s'agit de poursuivre l'étude des phénomènes électromagnétiques. A cet égard, la théorie de Lorentz semblerait plus riche.

§ 30. **Ether et matière.** — Nous avons reconnu que, dans la théorie de Lorentz, l'on oppose des notions transcendantes de la congruence et de la mesure du temps aux notions positives que l'on peut définir expérimentalement d'après Einstein, les premières étant prises comme une *réalité métaphysique*, les secondes comme une *apparence physique*. Une semblable conséquence est due à la représentation d'un *éther indépendant de la matière* placé à la base de la théorie.

Mais la critique tend à s'affranchir d'un pareil absolu, en reléguant l'éther fixe parmi les hypothèses qui ne peuvent pas même tomber indirectement sous le contrôle d'une expérience concevable. Elle arrive ainsi à lui enlever toute signification, et à ne voir en lui qu'un pur artifice.

Un tel artifice peut être jugé commode pour le traitement mathématique, mais on ne peut nier qu'il n'ait aussi ses dangers, puisqu'il a pu justifier, pendant un certain temps, des doutes dénués de fondement. Cependant, il ne faut pas trop nous plaindre de ces doutes qui, affrontés ouvertement, et, avant tout, par le fondateur même de la théorie, ont donné lieu à une tentative d'unification des forces, qui se présente comme une séduisante promesse pour l'avenir.

Nous voulons simplement indiquer la voie qui, selon nous, doit éliminer *a priori* les questions factices qui naissent de l'artifice ainsi introduit. Il s'agit d'obtenir une représentation plus satisfaisante de l'éther, qui doit être *relative à la matière*.

Il ne faut pas oublier que l'éther est un simple intermédiaire pour les rapports des corps matériels; ces corps sont la *donnée* dont il faut partir pour *construire* une représentation de l'éther.

Nous avons bien examiné le rapport de l'éther et de la matière dans l'étude des différents modèles mécaniques (§ 24), mais c'était, en général, à un point de vue tout différent. On supposait un fluide doué de certaines propriétés, images simplifiées de fluides réels (par exemple un fluide homogène infiniment compressible, ou analogue à un solide mobile, ou immobile, etc.), et l'on considérait la matière comme le lieu des *points singuliers* de ce fluide éthéré, soit que l'on considérât les points matériels comme des *points de destruction ou trous* dans l'éther, soit comme des *tourbillons* ou des points de *torsion*, etc.

De telles spéculations représentent la tentative d'embrasser *au moyen d'analogies* les rapports phénoménaux que l'on suppose se rapporter à l'*ensemble* des corps. Leur valeur réside dans la notion d'une *solidarité universelle* de tous les objets sensibles qui s'oppose à l'intuition de la matière même, c'est-à-dire à la distinction des propriétés *intérieures* et *extérieures qui s'y rattachent*.

Mais il est bien difficile d'exprimer adéquatement la solidarité du monde sensible et de *corriger* les distinctions abstraites qui s'y rapportent, au moyen d'un modèle construit *a priori*. Il n'y a donc pas lieu de s'étonner si les modèles imaginés par des hommes de génie rendent bien peu compte des rapports

qu'ils ont en vue d'expliquer, et si des théories, faisant abstraction de tout modèle mécanique, réalisent aussi bien ce but, au point de vue de la connaissance.

Ce que nous demandons, c'est une *définition de l'éther comme d'un objet qui se trouve en tout lieu et en tout instant dans toutes les matières plus ou moins éloignées*, soit, par exemple, comme un ensemble de particules qui émanent des corps matériels ou qui se concentrent en eux; de particules, dont les mouvements seraient reliés à des phénomènes matériels et pourraient être connus, au moins dans leurs effets moyens, à l'aide des rapports physiques entre les corps.

Nous croyons qu'une représentation unificatrice de ce genre ne tardera pas à se faire jour dans la physique des radiations, où l'on considère aujourd'hui comme radicalement distinctes les radiations formées d'émission (décharges d'électrons) et les radiations vibratoires (qui ne sont pas déviées par une charge magnétique). Ce sera, en quelque sorte, la renaissance d'une optique de l'émission, mais radicalement transformée.

Sans nous arrêter aux difficultés d'un tel programme, remarquons que la conception de l'éther que nous demandons éliminerait *a priori* de l'électromagnétisme des corps en mouvement les questions factices qui naissent du choix d'un système absolu de référence. Il s'agirait seulement de savoir, pour tout milieu et pour tout ordre de phénomènes qui s'y déroulent, quelles sont les particules de l'éther auxquelles on doit attribuer le phénomène. Et, si pour les phénomènes qui ont leur origine à l'intérieur d'un milieu, on fait intervenir seulement les particules émanant des corps qui s'y trouvent, le principe de relativité est assuré *a priori*.

§ 31. **La dynamique de l'électron : les radiations.** — Nous avons indiqué (§ 28) comment l'explication du principe de relativité pour les phénomènes électromagnétiques a été obtenue grâce aux plus récents développements de la théorie des électrons, dont est issue une *dynamique électrique*.

Le point de départ de la nouvelle doctrine est l'étude des différentes radiations déviées par un champ magnétique (rayons cathodiques, rayons Becquerel, etc.), qu'on est conduit à considérer, pour rendre compte de leurs propriétés, comme des décharges d'électrons.

Si l'on accepte cette hypothèse de Becquerel et de J.-J. Thomson, on a, dans ces radiations, un exemple de corps électrisés qui se meuvent avec des vitesses énormes, presque égales à celle de la lumière. Les vitesses que l'on rencontre dans la dynamique ordinaire sont comparativement très petites.

Pour traiter du mouvement des électrons dans les rayons cathodiques, etc., il faut considérer que l'accélération ou le ralentissement de ce mouvement donne lieu à un courant qui modifie le champ électromagnétique. En tenant compte de cette modification, on peut constituer *une dynamique des électrons*, dont les principes trouvent justement une application et une confirmation dans l'étude de ces rayons. (Abraham, Schwarzschild, Kauffmann, etc.)

On peut mettre l'équation vectorielle du mouvement d'un électron sous une forme analogue à l'équation newtonienne du mouvement d'un point matériel. Si l'on désigne par m la masse du point, a_g l'accélération, f_g la force, dans la direction g, nous pourrons écrire cette dernière

$$m a_g = f_g$$

A la place de m, on doit substituer, dans la nouvelle dynamique, une expression de la forme $m + m_g$ et écrire par conséquent

$$(m + m_g)\, a_g = f_g$$

La grandeur m_g, qu'on ajoute à la masse propre m de l'électron, n'est plus une constante, mais dépend de la forme géométrique l'électron, de sa charge électrique, de la grandeur et de la direction de sa vitesse par rapport à g. Elle a reçu le nom de *masse électromagnétique*.

Appliquons l'équation précédente au cas des rayons considérés comme des décharges d'électrons négatifs.

Une force électrique ou magnétique dévie ces rayons, et, de la déviation obtenue, du calcul de la charge transportée et de la chaleur dégagée, on peut tirer, par différentes méthodes, une mesure de la masse totale $m + m_g$. Pour les rayons, dont la vitesse s'approche de $\frac{1}{10}$ de celle de la lumière, on trouve que cette masse est environ mille fois plus petite que celle de l'atome d'hydrogène.

Mais pour les rayons cathodiques ayant de grosses différences de potentiel entre les électrodes et doués de vitesses qui vont jusqu'aux $\frac{9}{10}$ de celle de la lumière, Kauffmann a trouvé des masses très supérieures. On peut très bien représenter les différents résultats expérimentaux, en admettant que la masse électro-magnétique est très supérieure à m, ou même que $m = o$.

Dans cette dernière hypothèse, la masse d'un électron serait purement électro-magnétique, c'est-à-dire que la production des *forces d'inertie* nécessaires pour accélérer le mouvement d'un électron, ou créées du

fait de le retarder, s'explique comme un phénomène électro-magnétique.

§ 32. **La dynamique électrique.** — La dynamique de l'électron conduit à une explication de la dynamique newtonienne, qui se présente comme une théorie approximative des mouvements doués de petites vitesses (Wien 1901).

Supposons d'abord qu'un point matériel puisse être considéré comme un électron, et considérons, par exemple, sa masse électromagnétique m_1 dans la direction du mouvement (*masse longitudinale*). En désignant par V la vitesse de la lumière, v la vitesse de l'électron, e sa charge, r son rayon (l'électron étant pris comme sphérique) on a

$$m_1 = m_0 \left(1 + \frac{6}{5}\frac{v^2}{V^2} + \cdots\right).$$

$$m_0 = \frac{2}{3}\frac{e^2}{V_2\, r}.$$

On peut développer, d'une manière analogue, la *masse transversale* de l'électron (qui est dirigée perpendiculairement à la première) au moyen d'une série suivant les puissances paires de $\frac{v}{V}$, dont le premier membre est toujours m_0.

On en déduit que, *si v est petit par rapport à V, la masse électro-magnétique de l'électron se réduit sensiblement à la constante m_0*. Cela équivaut à dire précisément que, pour de faibles vitesses, la loi de Newton est valable, approximativement, comme loi du mouvement de l'électron.

De la dynamique de l'électron, on passe à une nouvelle dynamique électrique des corps, grâce à quel-

ques hypothèses sur la constitution de la matière et sur les forces. On est ainsi conduit à étendre l'explication électrique de la loi newtonienne du mouvement au cas d'un point matériel qui ne peut plus être considéré comme un électron unique, mais comme un agrégat d'électrons.

Lodge (1902) a développé une *théorie électrique* de la matière qui consiste à considérer l'atome comme constitué par un système d'électrons positifs et négatifs, ces derniers tournant autour des premiers comme des satellites. La détermination de ce modèle résulte de la comparaison des différentes sortes de radiations, notamment de la différence entre les rayons d'électrons négatifs et les rayons d'électrons positifs (rayons-canaux, rayons α du radium).

La théorie électrique de la matière conduit à une *théorie électrique des forces*. Les forces intérieures de la matière (forces élastiques, chimiques, etc.) sont représentées comme résultantes des actions qui s'exercent entre les électrons constitutifs. La gravitation même admet, comme nous le verrons, une explication électrique.

On en déduit que les lois du mouvement d'un corps, considéré comme point matériel, sont les mêmes que celles qui régissent les mouvements d'un électron, c'est-à-dire que le mouvement est représenté par l'équation vectorielle.

$$f_g = m_g\, a_g.$$

qui est, *dans sa forme*, analogue à l'équation newtonienne, mais où la *masse électro-magnétique* m_g n'est plus une constante, mais dépend de la vitesse et de la direction du mouvement par rapport à celle g de la force.

Or, m_g est la somme des vecteurs correspondant aux

électrons qui constituent le corps en mouvement (points matériels). Elle dépend donc :

1° Des mouvements *intérieurs* des électrons dans les atomes ou dans les molécules.

On ne peut pas dire que les vitesses de ces mouvements soient négligeables vis-à-vis de celle de la lumière, car on doit admettre qu'elles sont notablement supérieures aux vitesses des mouvements ordinaires. Mais, si les dimensions de la particule matérielle sont grandes par rapport à celles de l'électron, la masse électro-magnétique totale, qui correspond à ces mouvements intérieurs, provient d'un calcul de moyennes et peut être considérée, par conséquent, comme constante.

2° Du mouvement *extérieur* ou visible de la particule matérielle.

Mais, quand il s'agit de petites vitesses par rapport à celle de la lumière, ce mouvement extérieur ne modifie pas sensiblement la masse électro-magnétique.

En définitive, m_g peut être considéré comme une constante, c'est-à-dire que *pour des vitesses relativement petites, les lois du mouvement de la dynamique électrique trouvent une expression approximative dans les lois de la dynamique newtonienne.*

Cette conclusion est très intéressante. Elle représente une inversion dans le problème classique de la philosophie mécaniste. *Au lieu d'expliquer les phénomènes électro-magnétiques par un modèle mécanique, on réussit à fournir un modèle électrique de la mécanique même, qui, de plus, implique une correction de cette dernière.*

Tel est le résultat auquel aboutit la tentative la plus poussée d'unifier les forces dans le sens des idées newtoniennes. Il en résulte une *dynamique non-*

newtonienne, dont dérivent les lois classiques comme cas limites.

§ 33. **L'explication électrique de la gravitation.** — Nous approfondirons plus loin le sens de ce développement inductif de la dynamique. Voyons, pour le moment, les conséquences positives qui en dérivent pour la théorie de la gravitation, dans l'astronomie planétaire.

Reprenant une idée de Mossetti, Lorentz, en 1900, a émis l'hypothèse que l'attraction newtonienne entre les corps s'explique comme résultante des actions exercées entre les électrons qui les composent. Il suffit d'admettre, pour cela, une petite différence entre l'attraction et la répulsion qu'une charge électrique exerce sur deux autres charges de nom contraire. La théorie électronique de la matière sert d'appui à cette hypothèse.

Seulement, d'après elle, la gravitation doit se propager avec la vitesse de la lumière, ce qui semble contredire les conclusions de Laplace et Lehmann-Filhès. (Cf. Liv. II, § 29.) Mais, l'introduction d'une vitesse finie de propagation était la seule modification de la loi de Newton envisagée par ces auteurs. Poincaré, au contraire, en tenant compte d'autres petites corrections introduites par les hypothèses de la dynamique électrique, qui s'ajoutent à la précédente, prétend avoir découvert une certaine compensation entre elles, si bien que la divergence d'avec la loi de Newton, au lieu d'être de l'ordre de l'aberration, comme dans le calcul de Laplace, n'est plus que de celui de son carré.

Il devient donc possible que la propagation de la gravitation avec la vitesse de la lumière soit conciliable avec les observations astronomiques. C'est ce que des recherches plus étendues devront nous révéler.

Si, notamment, cette hypothèse conduit à une correction des petits écarts de la théorie newtonienne (Liv. II, § 29), les hypothèses de la dynamique électrique en seront d'autant confirmées. Or, le calcul conduit à prévoir une perturbation du mouvement du périhélie de Mercure qui se fait dans le sens indiqué par l'observation astronomique, mais qui ne rend compte, qu'en faible partie, du phénomène réel.

CHAPITRE VI

LA DYNAMIQUE NON-NEWTONIENNE ET LA VALEUR DE L'EXPLICATION MÉCANIQUE

§ 34. **Conclusion: la dynamique générale non-newtonienne.** — Voyons quelles conclusions résulte des développements précédents, en ce qui concerne une vérification plus étendue ou une correction de la mécanique.

L'idée de traiter la physique comme une extension de la dynamique se trouve jusqu'à un certain point justifiée *a posteriori* par le succès des prévisions déductivement établies en partant d'observations et d'expériences qui fournissent, dans les différents domaines de la physique, les hypothèses complémentaires. Cependant, le succès n'est pas complet, et, en fin de compte, il faut constater que :

1° Les conclusions vérifiées ont souvent une généralité plus grande que celle des prémisses, de sorte qu'elles ne peuvent pas servir de preuve pour les hypothèses de la mécanique classique, qui sont plus précises que celles que l'on tire des observations et des expériences directes (§ 16);

2° L'explication mécanique de certains phénomènes exige l'introduction de considérations de moyennes et de limites (§ 15);

3° Certains phénomènes échappent à la prévision de

la mécanique théorique et ne peuvent s'y adapter, à moins de recourir à des hypothèses un peu artificielles et indéterminées, comme, par exemple, les phénomènes d'hystérésis (§ 12);

4° Certains phénomènes optiques ou électromagnétiques semblent contredire directement les principes de la dynamique élémentaire et, notamment, le principe newtonien d'action et de réaction (§ 27).

On en tire la conclusion suivante : *la physique, au lieu d'offrir une vérification plus précise de la mécanique classique, conduit plutôt à en corriger les principes, considérés* a priori *comme rigoureux.*

Il en résulte encore que la correction apportée par l'optique électromagnétique s'étend au *principe d'énergie généralisé*, grâce auquel le principe newtonien d'action et de réaction se déduit d'une symétrie statique (Liv. II, § 22).

Or, il convient de voir quelle sorte d'hypothèses on peut substituer à ce principe dans une dynamique générale non-newtonienne, si l'on maintient les postulats implicitement contenus dans les concepts fondamentaux, et les lois de l'équilibre et du mouvement commençant (Liv. II, § 23). Il s'agit d'y rattacher les corrections qui se sont présentées auparavant, et, notamment, de montrer comment la dynamique électrique se réduit à une détermination particulière de l'hypothèse non-newtonienne.

Cherchons à nous rendre compte de la modification qui s'introduit dans les vues classiques, quand on laisse tomber le principe d'action et de réaction, et reportons-nous, pour cela, à un cas schématiquement simple : plusieurs corps A, B, C..., immobiles par rapport aux directions des étoiles fixes, définissent un champ de forces dans une certaine région spatiale S.

Cela signifie, qu'en transportant un point matériel P, dans une région quelconque de S, on doit exercer sur lui une force connue pour l'y maintenir, force que nous pouvons considérer en général comme dépendante de la masse *m* de P.

Imprimons à P une impulsion. Le mouvement de P se continuera sous l'action de l'impulsion initiale et de la force qui est définie, comme plus haut, pour chaque région de S ; le principe d'inertie généralisé permet d'*additionner* simplement ces deux circonstances déterminantes ou celles qui sont définies pour chaque instant : la vitesse de P à cet instant, et la force qui s'exerce sur P par suite de sa position *actuelle*.

En définitive, on déduit la prévision du mouvement futur de P de la superposition de ses circonstances déterminantes :

1° des propriétés *intérieures* à P, c'est-à-dire sa masse ;

2° des circonstances *extérieures* au mouvement de P, c'est-à-dire le champ de forces défini par A, B, C... ;

3° d'une simple *relation* entre P et A, B, C..., c'est-à-dire de la *vitesse* de P par rapport à ces corps à l'instant donné.

Ces circonstances définissent l'*état actuel du mouvement d'un point isolé* et l'*état futur dépend de l'état actuel et non des états précédents*. (Cf. § 12.) Cette hypothèse de *non-hérédité* correspond au principe d'inertie généralisé. Elle implique, en particulier, que *le champ de S n'est pas modifié par le mouvement de P*, au moins en ce sens : la *présence* de P en S modifie le champ de forces défini par les corps A, B, C..., c'est-à-dire change le résultat des expériences qui s'effectuent sur d'autres points maintenus fixes en S ; mais, *cette modification étant conçue comme instantanée*, on n'a pas lieu d'en tenir compte dans l'étude du mouvement

de P, c'est-à-dire que la *présence de P dans le champ à un instant antérieur ne modifie pas la force qui agit sur P dans sa position actuelle*.

Abandonnons, maintenant, le principe d'inertie généralisé, et (en conservant les autres concepts et principes de la mécanique), cherchons à découvrir la forme générale d'une *hypothèse non-newtonienne*, qui puisse prendre la place du principe abandonné dans la détermination du mouvement. Cette hypothèse pourra faire dépendre le mouvement futur de P de tous les états précédents, c'est-à-dire qu'elle pourra prendre la forme d'une *hypothèse d'hérédité*. Mais, si l'on cherche une représentation des faits au moyen de causes élémentaires, il faut admettre que ces états ont amené par continuité les modifications que nous pouvons constater actuellement dans le champ.

C'est ainsi qu'à une *hypothèse d'hérédité* se substitue une *hypothèse de solidarité* du champ : *Si un point isolé P se meut dans un champ S par rapport aux corps immobiles A, B, C..., qui sont considérés comme des circonstances déterminantes du mouvement, son mouvement futur dépend de sa masse, de sa position, de sa vitesse actuelle et des forces qui, à l'instant actuel, pourraient être virtuellement déterminées par l'exploration du champ. Ces forces, de leur côté, ne dépendent pas seulement de A, B, C ..., mais aussi du mouvement antérieur de P, comme si P n'était pas isolé, mais contenu dans un milieu qui se meut avec lui.*

La représentation de ce milieu fictif, qui contredit les circonstances expérimentales supposées dans l'hypothèse de l'*isolement* (d'une ambiance vide), équivaut à reconnaître qu'on ne peut distinguer par abstraction les circonstances *intérieures* et *extérieures* du mouvement, et arrive, en fin de compte, à exprimer une hypothèse de solidarité de tous les objets sensibles.

Le développement de la mécanique énergétique et ceux de l'optique électromagnétique reposent, de différentes façons, sur un tel point de vue. Mais, à notre avis, on outrepasse la mesure, quand on veut supprimer les distinctions qui se rattachent au concept primitivement donné de matière (Cf. §§ 17, 19), au lieu de les considérer comme une première approximation, nécessaire dans le développement des connaissances, qu'on doit progressivement corriger par des adjonctions successives.

Il ressort de la critique précédente que, si on laisse tomber le principe d'inertie généralisé, il y a lieu de construire une dynamique générale non-newtonienne, où l'on étende l'observation des circonstances déterminantes du mouvement.

1° ou dans le temps avec une *hypothèse d'hérédité*,

2° ou dans l'espace avec une *hypothèse de solidarité*, substituable à la première.

Les altérations permanentes des corps élastiques (phénomènes d'hystérésis élastique) nous avaient suggéré la première hypothèse ; les phénomènes optiques et électromagnétiques nous conduisent à la seconde qui est propre à rendre compte de l'*hérédité apparente* qui se manifeste, par exemple, dans l'hystérésis magnétique, en tant qu'il suffit de postuler une modification de l'éther ambiant.

Or, il importe de remarquer que *la dynamique électrique est une détermination particulière de la dynamique non-newtonienne*, qui provient de la substitution au principe d'inertie généralisé d'une hypothèse de solidarité du champ du mouvement, quand *on maintient les principes de l'équilibre et du mouvement commençant*. En effet, nous avons observé (Wien) que les lois de la dynamique électrique fournissent approximativement celles de la dynamique newtonienne, et que l'approximation est d'autant plus grande qu'est plus faible la vitesse du mobile, de sorte que les lois de l'équilibre et du mouvement commençant finissent par se trouver exactes.

Le fait que les hypothèses de la dynamique électrique conduisent à une validité approchée de la dynamique newtonienne ne dépend pas d'ailleurs de la détermination particulière de ces hypothèses.

En effet, si nous reprenons l'hypothèse générale de la solidarité du champ du mouvement d'un point P, nous voyons que celle-ci nous conduit à admettre une *variation locale* progressive *du champ* (dépendant du mouvement de P, etc.), qui *se propage avec une certaine vitesse V*. Le principe d'inertie généralisé équivaut à prendre $V = \infty$; et cette valeur peut être prise, sans erreur appréciable, toutes les fois que la vitesse de P est *assez petite par rapport à V*.

Le degré de petitesse ne peut être fixé *a priori*, puisqu'il dépend du *système de référence* du mouvement. Le principe d'inertie est déjà vérifié, avec une bonne approximation, pour les vitesses très petites de la dynamique terrestre ; et l'approximation est meilleure et se rencontre aussi pour des vitesses plus grandes, quand on rapporte le mouvement à un système de directions astronomiquement fixes. Ceci comporte, en quelque sorte, une vue de la solidarité universelle, dont la dynamique newtonienne était déjà obligée de tenir compte.

De ce qui précède nous pouvons conclure que les développements de la philosophie mécaniste correspondent à la tentative d'*expliquer* la physique, en y voyant une vérification des *hypothèses* fondamentales d'une *mécanique* considérée comme *générale et rigoureuse*.

Les déductions et les expériences entreprises pen-

dant deux siècles semblent, au contraire, infirmer une de ces hypothèses, et laissent à penser qu'à la mécanique newtonienne il faut substituer une mécanique non newtonienne, dans laquelle on conserve les lois de l'équilibre et du mouvement commençant. Les récentes théories électromagnétiques prétendent même déterminer les hypothèses complémentaires de la nouvelle dynamique. Mais, abstraction faite de cette détermination, il y a lieu de retenir *que le principe d'inertie généralisé a une valeur approximative d'autant plus grande que la vitesse du mouvement par rapport à la vitesse de la lumière est plus petite.*

Il était intéressant, à notre avis, de reconnaître comme la partie la plus ferme de la mécanique « celle qui est commune à toutes les mécaniques relatives à des systèmes de référence quelconques ».

§ 35. **L'explication physique : la valeur des modèles mécaniques et des équations.** — Nous avons déjà tiré des chapitres précédents une première série de conclusions relatives à la vérification de la dynamique ; nous en déduirons de nouvelles sur *la valeur des modèles mécaniques* et le sens des *explications* en physique.

Pour cela, nous devons revenir sur ce que nous avons dit au début de ce livre.

L'hypothèse d'un substrat mécanique invisible des phénomènes physiques peut s'interpréter positivement comme un processus d'association et d'abstraction qui aboutit à représenter les rapports des phénomènes au moyen de *rapports quantitatifs* entre certaines données, c'est-à-dire au moyen d'*équations* qui déterminent les phénomènes.

Nous avons d'ailleurs distingué deux types d'explication où l'on suppose comme données élémentaires

du phénomène dynamique, soit les « liaisons », soit, au contraire, les « forces », et où l'on tend à les réduire les unes aux autres. Ces deux types, qui se rattachent aux noms de Descartes et de Newton, se rencontrent et s'alternent dans l'évolution des sciences, dont nous avons tenté d'esquisser le schéma. Ils convergent et s'unissent, enfin, dans une association plus intime des données sensibles et dans un rapprochement des images, si on élargit, d'une part, le concept des liaisons et si on unifie, de l'autre, les forces dans un type élastique ou électrique.

Mais, dans le contraste entre la tendance cartésienne et la tendance newtonienne, on ne reconnaît pas seulement un critérium différent pour le choix des images primitives, optiques ou tactilo-musculaires, mais encore une disposition à évaluer différemment le *moment génétique associatif* et le *moment actuel* d'abstraction de la représentation au moyen de rapports entre des quantités.

Sous cet aspect, les deux tendances sont, aujourd'hui, plus distantes l'une de l'autre que jamais, car les thèses les plus radicales sont également soutenues, soit que l'on affirme que « l'*explication* physique réside dans le *modèle mécanique* », soit, au contraire, « qu'elle consiste dans les *équations* qui déterminent le phénomène *en dehors de tout modèle d'aucune sorte* ».

On rattache d'ordinaire cette différence dans la façon de comprendre « l'explication physique » à la différence psychologique qui sépare les esprits *imaginatifs* des esprits *logiques*. Mais il y a, en outre, une diversité de fonctions entre les deux types d'explication, qui se rapportent à deux moments du progrès scientifique, au développement proprement inventif que préconisent surtout les imaginatifs et à la systé-

matisation de la science acquise où excellent les esprits logiques.

Le synonyme d' « expliquer », c'est-à-dire « comprendre », signifie pour les uns comme pour les autres la possibilité d'effectuer *des prévisions*. Mais celles-ci ne s'appliquent pas au même domaine.

Il est évident que l'*explication synthétique*, à laquelle correspond le maximum de compréhension, résulte d'une coordination critique des différents types d'explication, qui fournissent non seulement la totalité des prévisions exigibles, mais aussi une connaissance adéquate des rapports entre les différents domaines auxquels ils s'appliquent.

Illustrons cette manière de voir en développant, sous forme de thèses et d'antithèses, les deux opinions opposées sur la valeur de connaissance et la valeur heuristique des équations et des modèles.

Thèse : La possibilité de construire un modèle mécanique pour un groupe de phénomènes A, implique qu'on peut, à tout instant, déterminer leurs données mesurables, une fois fixés les paramètres arbitraires.

La *valeur de connaissance* du modèle réside dans les équations qui permettent cette détermination ; ces équations s'obtiennent comme *partie commune* des *différents modèles possibles*.

Ici, il faut noter une différence essentielle entre deux cas :

1° On peut obtenir les équations indépendamment de tout modèle, en tant qu'elles relient les données mêmes dont on cherche la variation. Dans ce cas, le modèle a simplement servi d'intermédiaire pour établir certaines *associations entre les phénomènes* qui expriment tout le *contenu positif* de la théorie. Exemple : la théorie électromagnétique de Hertz (§ 23).

2° D'autres fois, au contraire, les quantités reliées par les équations ne peuvent pas se rapporter directement aux données des phénomènes, mais aux images. Dans ce cas, les équations n'expriment plus le contenu de la théorie ; elles n'expriment pas même la partie commune de *tous* les modèles possibles, mais seulement *les conditions communes à une certaine série de modèles*. C'est le cas de l'optique ondulatoire de Fresnel. On peut, il est vrai, obtenir également, ici, les équations fondamentales au moyen d'un petit nombre d'hypothèses générales en dehors de toute détermination particulière du milieu élastique vibrant, mais il n'en reste pas moins vrai qu'elles n'expriment pas directement les rapports positifs des phénomènes, puisque leur interprétation est liée au modèle.

Antithèse : un modèle mécanique relatif à un groupe de phénomènes A, étend les sensations sous la forme d'une vision imaginative, et suggère ainsi la découverte de nouveaux rapports :

1° entre les données de A,

2° entre celles-ci et d'autres données phénoménales d'un groupe plus étendu.

A ce titre, la *valeur heuristique* des modèles mécaniques adéquats à A, réside proprement dans certaines propriétés suggestives des images ; dans la possibilité de différentes extensions, et, en général, dans *les différences des modèles*.

Que l'on compare, à cet effet, l'optique ondulatoire et l'optique électromagnétique : le modèle élastique conduit plus vite, par analogie avec le son, à la découverte du principe de Döppler ; le modèle électromagnétique, équivalent au précédent pour les milieux non doués de conductibilité électrique et de perméabilité magnétique, laisse, par contre, prévoir de nouveaux rapports entre les corps conducteurs et opaques

(Maxwell), ou entre les phénomènes lumineux et le champ magnétique (Lorentz, Zeemann).

En définitive, les deux types d'explication des phénomènes physiques, au moyen d'équations ou de modèles, correspondent à deux formes différentes de la connaissance que l'on doit compléter l'une par l'autre. La première (au moins dans le cas typique d'équations ayant un sens positif) contient, pour ainsi dire, *un groupe formé de prévisions précises;* la seconde, *un groupe de prévisions* indéterminées *a priori*, mais *susceptibles d'extension.*

En ce sens, *comprendre une théorie physique* dans le sens le plus élevé du mot, c'est pouvoir tour à tour en parcourir le processus dans les deux sens, c'est-à-dire :

1° Reconstruire inductivement les associations et les abstractions qui ont conduit à la formation des concepts et discerner les hypothèses contenues en eux, dont une partie exprime la correspondance entre certaines différences qualitatives et certains rapports quantitatifs, dont l'autre partie détermine ces derniers rapports au moyen des équations fondamentales de la théorie;

2° Développer déductivement l'interprétation de ces équations, c'est-à-dire reconnaitre comment elles fournissent les différentes données des phénomènes, en fonction de quelques circonstances déterminantes, ce qui conduit surtout à *compléter, grâce à des hypothèses auxiliaires,* la connaissance des rapports quantitatifs par celle des rapports qualitatifs correspondants. (On a un exemple de ce processus dans l'hypothèse fondamentale de l'optique électromagnétique : les mêmes équations sont interprétées tantôt comme correspondant à des oscillations électromagnétiques constatables au moyen d'un résonnateur hertzien ou d'un cohéreur, tantôt à des radiations lumineuses ou calorifiques, etc., suivant la grandeur de l'élément que nous représentons comme une longueur d'onde.)

Pour celui qui a pénétré l'esprit d'un tel mode de compréhension, il est évident que son idée-mère est une *vue synthétique des rapports généraux des phénomènes dans un schéma simplifié, qui permet de faire abstraction des particularités techniques de l'expérience et des développements du calcul.*

Il serait extrêmement désirable que ceux qui traitent des problèmes de la physique théorique, s'appliquassent à faire ressortir cet aspect synthétique des explications avant de passer aux particularités de l'expérience ou du calcul. Les traitements trop analytiques ne seront jamais un obstacle pour le petit nombre des esprits supérieurs qui parviendront toujours à en tirer la synthèse; mais peut-être le vœu que nous inspire notre faiblesse trouvera-t-il accueil auprès du plus grand nombre.

LIVRE IV

L'HYPOTHÈSE MÉCANIQUE ET LES PHÉNOMÈNES DE LA VIE

CHAPITRE I

LA POSSIBILITÉ D'UNE SCIENCE DE LA VIE

§ 1er. **Introduction.** — La conception de « l'explication mécanique » comme «modèle » n'enlève rien de sa valeur à la tendance unificatrice des représentations partielles des phénomènes dans un progrès extensif de la science. Tous les problèmes soulevés par la philosophie mécaniste sont ainsi remis en question, quand on cherche à étendre l'explication mécanique aux phénomènes biologiques. Mais, tout d'abord, il convient de fonder la *possibilité* d'une telle extension, puis de montrer sa *valeur* et son *utilité* pour la science. La première question nous conduit :

1° à nous débarrasser de quelques *objections préliminaires;*

2° à examiner les problèmes relatifs au *déterminisme biologique*, en particulier à résoudre le contraste

entre le *déterminisme psychologique* et le *libre arbitre*, et entre le *physicisme* et l'*explication téléologique*;

3° à chercher si *les grands principes de la physique*, qui résultent de l'hypothèse mécanique, sont vérifiés dans les phénomènes de la vie.

§ 2. **Objections préjudicielles.** — Contre la possibilité d'étendre l'hypothèse mécanique à la biologie, on invoque quelques lieux communs dont il importe de faire justice. Par exemple, on oppose la *spontanéité*, le *changement* de tout ce qui vit à l'*inertie* et à l'*immuabilité* de la *matière*, et de l'antagonisme des images ainsi suggérées on déduit une contradiction dans les termes entre le mécanisme et la vie.

Si l'on prend la « spontanéité » dans le sens d' « activité » ou de « possibilité d'un changement sous l'effet de causes internes », l'image d'une matière absolument réceptive et passive ne répond pas au concept qu'on s'en fait en coordonnant les différents rapports physiques, où la matière apparaît toujours comme un complexe d'énergies. Dans ce sens, il serait plus juste de dire que tout vit et est actif autour de nous, et qu'il n'y a qu'une différence de degré dans l'intensité ou la rapidité des changements et dans l'importance relative des *facteurs intérieurs* ou *extérieurs* sur le cours des phénomènes.

Mais de semblables objections proviennent évidemment de raisons *sentimentales*. La vie ne nous est pas donnée seulement comme objet de représentation ; les prévisions qui s'y rattachent suscitent en nous la crainte ou le désir, correspondant à des fins voulues ou repoussées. Or, l'hypothèse mécanique est incapable d'*expliquer* les sentiments associés à la représentation de ce qui vit ou de prescrire une norme à la volonté ; bien plus, elle semble contredire ces sentiments par

une conception déterministe des faits psychiques, que nous examinerons plus loin.

Quelle est la valeur de ces raisons de sentiment ? Répondons sans hésiter : aucune. Mais nous croyons opportun de justifier cette réponse.

Entre savoir d'une part, vouloir et sentir de l'autre, il y a le rapport suivant : le sentiment et la volonté sont indépendants de la science ; la science ne peut pas modifier les émotions qui accompagnent les objets connus. Elle ne peut prescrire à la volonté aucune règle, si ce n'est hypothétiquement, c'est-à-dire s'il s'agit de moyens à approprier à des fins, ou de fins prises comme moyens par rapport à d'autres fins supérieures et fortement voulues.

Pour qui a bien saisi ce rapport, il est absurde de demander à une théorie scientifique l'explication des sentiments ou de prétendre que les images, employées comme moyens de prévision, pourront éveiller les sentiments mêmes qui accompagnent les faits représentés. Ainsi tombe l'objection préjudicielle soulevée contre la possibilité de l'extension d'une hypothèse mécanique aux phénomènes de la vie. Cette hypothèse répond à une attitude *contemplative* de l'esprit qui prévoit et fait abstraction des sentiments, grâce auxquels les prévisions prendront une *valeur* pour une autre attitude (*active*) de l'esprit.

§ 3. **Le déterminisme biologique.** — Mais la prévision est-elle possible, et n'est-elle pas contraire à la « spontanéité » de ce qui vit. C'est le problème positif qui surgit des divergences examinées plus haut ; c'est le problème du *déterminisme biologique.*

Celui-ci consiste à admettre « qu'on peut énoncer sur les phénomènes vitaux *des prévisions déterminées*, suivant l'ordre de coexistence et de succession causales », et que, par conséquent, ceux-ci peuvent être l'objet d'une connaissance scientifique progressant à l'infini. Or, on ne peut démontrer *a priori* le déterminisme. Il exprime une hypothèse générale, qui se justifie de la même façon que dans tous les domaines du savoir par le succès des prévisions établies, c'est-à-dire avec le progrès de la science. Entre les phénomènes de la vie et les phénomènes physiques, il n'y a aucune différence à cet égard qu'on ne puisse expliquer en tenant compte des conditions complexes du fait physiologique, soit qu'il s'agisse d'êtres vivants, soit, simplement, de leurs organes et de leurs tissus. La contradiction apparente de phénomènes différents qui se produisent dans des circonstances sensiblement *identiques*, se résout par une analyse plus approfondie de celles-ci. Des exemples lumineux à cet égard sont examinés et discutés par Claude Bernard dans son *Introduction à la médecine expérimentale* auxquels on en pourrait joindre aujourd'hui beaucoup d'autres, dus aux progrès les plus récents de la biologie.

Nous n'en rappellerons qu'un seul, hautement instructif, en citant le résultat des études sur la malaria (Laveran, Marchiafava, Golgi, Ross, Grassi, Dionisi, Bignami et Bastianelli). Il apporte la promesse réconfortante que l'étiologie des maladies va sortir de ce genre obscur d'explication dans lequel s'est illustré le médecin de Molière.

§ 4. **Le déterminisme psychologique et le libre arbitre.** — En vérité, le déterminisme biologique ne serait contesté par personne, si, pris dans son acception la plus générale, il n'entraînait pas la nécessité du déterminisme pour les phénomènes psychologiques, et, en particulier, pour notre pensée et notre volonté.

Un sentiment de répulsion s'attache à cette conception, sentiment qui s'atténuerait certainement, si nous pouvions isoler du monde connu notre propre personnalité et qui disparaîtrait complètement s'il était possible d'exclure du déterminisme biologique l'homme et les animaux supérieurs pour le restreindre aux êtres inférieurs de l'échelle zoologique, si éloignés de nous.

Mais, une réflexion scientifique plus mûre nous défend d'opérer une démarcation aussi arbitraire dans ce qui paraît ordonné suivant une série continue. Notre cause reste liée à celle des vibrions et des amibes. Puisqu'on passe par degrés des formes inférieures de la vie aux formes supérieures, puisque les phénomènes de l'intelligence se développent par transitions insensibles des animaux à l'homme et font partie de la vie comme causes et comme effets, il faut se résoudre à cette alternative unique : ou admettre dans toute son extension le déterminisme psychologique et biologique ou le nier et accepter l'idée de la *spontanéité* dans un sens qui exclut ou limite *a priori*, dans ce domaine, toute *possibilité de prévisions*.

Pour sérier les difficultés, il est bon d'envisager le *problème de libre arbitre*, en distinguant en lui le problème *scientifique* qui concerne le déterminisme psychologique des actes humains et le problème *moral* qui se rattache à leur jugement. Se servir d'arguments empruntés à ce dernier ordre de considérations dans le domaine scientifique est une intrusion indue dont nous devons nous émanciper, si nous voulons arriver à une vue scientifique sereine.

Ceci admis, si l'on se borne aux actes de la volonté d'autrui, toute obscurité disparaît. La question « du *déterminisme* de la volonté par des antécédents » n'a pas d'autre sens positif que de savoir « si les délibérations d'autrui sont *prévisibles* pour qui connaît bien les antécédents du délibérant ». Or, si l'on compte au nombre de ces antécédents les sentiments et la volonté de la personne dont on parle, une réponse affirmative n'est pas douteuse. Des observations directes viennent appuyer la thèse déterministe, indépendamment des raisons générales qui confirment le déterminisme psychologique. Et cela d'une façon d'autant plus sûre, qu'on élimine davantage les causes d'erreurs provenant de la connaissance incomplète des motifs qui influencent l'esprit d'autrui et de la complexité des faits qui changent pour de très petites variations de ces motifs.

A l'intuition de la *rationalité* des actions humaines (c'est-à-dire de leur dépendance vis-à-vis de motifs), qui résulte des observations précédentes, s'ajoutent d'autres données objectives, comme la *régularité statistique* des faits sociaux, si bien illustrée par Quetelet, etc.

Mais il ne sert à rien d'insister sur ces arguments. Ils suffisent certainement, pour celui qui a éliminé de son esprit toute prévention d'ordre moral, à constituer, dans leur ensemble, une preuve inductive du déterminisme psychologique, ou, si l'on préfère, à justifier dans ce domaine aussi la confiance dans la possibilité d'une science ne différant en rien de celles qui se rapportent aux autres phénomènes envisagés par nous comme des rapports invariables de coexistence et de succession.

Si le déterminisme psychologique soulève des difficultés, elles ne proviennent pas de raisons d'ordre scientifique. Pourquoi, dès lors, tant de répulsion à l'accepter?

La réponse est claire : parce que la thèse déterministe semble contredire l'intuition que chacun a de *la*

liberté de sa propre volonté, parce que c'est au concept de cette « liberté » que se rattachent les idées directrices qui sont à la base de nos jugements moraux.

Il importe donc de montrer qu'en interprétant correctement l'intuition que nous avons des faits volontaires, *liberté et déterminisme ne se contredisent pas*. La thèse de la liberté de notre volonté, suivant l'attestation de notre conscience, affirme :

1° La possibilité pour chaque homme de *faire*, dans certaines limites, ce qu'il a décidé (*liberté physique ou liberté extérieure*);

2° La possibilité que chaque homme a d'influer, usqu'à un certain point, sur le cours de ses pensées et de ses sentiments et de déterminer ou de modifier ainsi ses décisions ultérieures, en inhibant ou en renforçant l'action des motifs. Cette « liberté de la volonté », opposée à la « liberté de l'exécution », constitue *la liberté morale ou liberté intérieure*.

Elle a, comme la première, une existence réelle. En elle, nous puisons notre confiance en nous-mêmes. En elle, nous posons le vrai fondement de notre *responsabilité*, si bien que nous attribuons le plus haut degré de responsabilité aux actions voulues avec préméditation, comme conséquences d'une délibération mûrie, à laquelle nous avons subordonné une série d'actes, et, par conséquent, en connexion avec les *caractères permanents* de notre *personnalité*. Au contraire, nous croyons avoir moins de responsabilité lorsqu'il s'agit d'actions imprévues, tout en nous inculpant de ne pas nous être prémunis contre la possibilité d'une telle occurrence, en en prohibant l'effet sur notre volonté. Si bien que cette responsabilité s'évanouit presque à nos yeux si l'action fut provoquée par un motif puissant et inattendu.

Tout cela est parfaitement conforme au sens commun, et, comme nous l'avons dit, nécessaire à la vie pratique qui exige que nous ayons confiance dans notre propre volonté.

Mais, en tout cela, il n'est rien de contraire à la thèse déterministe de la prévisibilité des faits volontaires. On peut seulement tirer des contradictions apparentes d'une façon vicieuse de raisonner transcendantalement. C'est de deux façons que l'on introduit quelque chose de transcendant.

En premier lieu, en appliquant à la volonté un vieil argument de Locke et de Leibniz, dont le sens premier était tout différent. Si on admet un second degré de volition, consistant dans la « volonté de vouloir », on doit en admettre un troisième, puis un quatrième, et ainsi de suite jusqu'à l'infini. De cet infini ressort pour quelques-uns une conception transcendante de la volonté, qui *se détermine elle-même* : d'où l'*arbitrium indifferentiæ* pour lequel la prévision devient impossible. Mais l'argument s'appuie ici sur une équivoque.

Quand on dit : nous avons la « volonté de vouloir », la volonté prise comme sujet n'est pas la même chose que la volonté qui forme l'objet de la volition. La volition de second degré n'implique pas le non-sens d'une volonté qui se détermine *elle-même*, mais le fait psychologique qu'un acte de volonté peut être subordonné à un autre qui le précède. Or, évidemment, cette subordination (d'ailleurs soumise, en partie, aux contingences extérieures) ne peut dépasser un nombre fini de degrés, étant donné le temps exigé par une volition. Il n'y a donc pas lieu de discuter davantage le précédent argument dialectique (emprunté à la téléologie naturelle), et de relever que, d'une série *infinie* de causes, on ne peut conclure,

sans contradiction, à une cause *première* qui soit *cause d'elle-même.*

Un autre mode de raisonnement, en apparence plus profond, introduit d'une façon vicieuse un concept transcendant de la *personnalité* humaine. La phrase « je puis agir et vouloir selon mon bon plaisir, même en opposition avec les motifs qui influencent mes déterminations » représente la personne agissante comme placée en dehors de la série de ses propres volitions. Or, si l'on veut accorder un sens intelligible à une pareille phrase, il n'y a qu'une façon de la comprendre. Le « Moi » auquel il plaît d'agir et de vouloir n'est autre chose qu'une expression continue de la volonté même qui subordonne aux motifs, qui se sont révélés précédemment comme permanents, ceux qui sont accidentels et transitoires.

La *personnalité morale* d'un homme s'identifie précisément avec cette continuité de la volonté, résultant de facteurs organiques et d'éléments assimilés du milieu extérieur. Aucun doute ne s'élève à ce sujet, quand nous considérons la personne d'autrui; par contre, si nous nous envisageons nous-même, nous sommes facilement abusés par le dédoublement du moi que nous opérons, en le prenant une première fois comme sujet et une seconde fois comme objet, c'est-à-dire en nous confondant, nous sujet de l'action, avec la représentation que nous avons de nous-même.

Une fois le moi considéré comme objet de représentation, il est facile de se convaincre qu'on ne peut attribuer à celle-ci un contenu dépassant l'idée de ce qui est relativement permanent dans nos volitions. Car, si l'on oppose à cette réalité considérée comme *apparente et relative*, une *substance absolue ou âme*, dans laquelle on fasse consister notre *personnalité*

éthique, on retombe dans un de ces processus infinis de définitions dont l'inanité a déjà été mise en lumière.

Malheureusement, cette idée transcendante de l'âme domina jusqu'à nos jours la controverse du libre arbitre, dont l'histoire se rattache à celle du problème religieux de la prédestination et de la grâce. C'est un tel aspect de la question qui domine encore la pensée de Leibniz dans sa *Théodicée*. Ainsi, tout en opposant au fatalisme extérieur de Spinoza une vision claire du déterminisme psychologique intérieur, il devait attribuer à la *liberté*, comprise comme *spontanéité de l'être intelligent*, un sens métaphysique transcendant.

Ce sens se révèle avec une grande netteté dans l'évolution ultérieure du déterminisme dans la philosophie de Kant. Le déterminisme du monde phénoménal y est opposé à l'autonomie nouménale, c'est-à-dire à la volonté libre en soi, tant qu'on considère la cause intelligible du vouloir (?!), mais déterminée selon des lois immuables dans ses manifestations phénoménales. Le développement naturel de cette distinction mène à la doctrine de Schopenhauer : la volonté transcendante, conçue en dehors de ses actes, en dehors de l'espace et du temps, finit par prendre la place de la *substance* ou de la *chose en soi*.

Ces dernières conclusions de la philosophie classique sont à nos yeux pleines d'enseignements, car il en ressort, d'une part, la reconnaissance du déterminisme psychologique dans un sens humain et positif, d'autre part la preuve que le problème du libre arbitre n'intéresse la raison pratique qu'en tant qu'on tient pour nécessaire un fondement transcendant de la morale. Mais si l'on considère la représentation transcendantale d'une volonté et d'une personnalité éthique, en dehors de ses manifestations, comme privée de sens,

il en résulte clairement que la thèse de la liberté de notre volonté ne contredit pas le déterminisme.

Chacune de ces deux thèses conserve, dans son domaine respectif, toute sa valeur. La possibilité d'une extension illimitée de la science psychologique n'empêche pas *l'appréciation* des actions humaines, en tant qu'elles sont *voulues ou non* par rapport à des *fins* données.

Il est vrai que la thèse déterministe a pu exercer une influence décourageante sur quelques volontés faibles, par suite d'une interprétation erronée. Stuart Mill, qui en fut victime, raconte s'en être délivré dans un passage suggestif de son autobiographie : « Lorsque j'eus compris la théorie pour la première fois dans sa vraie signification, elle ne m'apparut plus décourageante, et, indépendamment du soulagement qu'elle procurait à mon esprit, je cessais de souffrir de ce poids si lourd pour celui qui tente de réformer les opinions d'autrui, qui est de reconnaître qu'une doctrine puisse être vraie et la doctrine contraire moralement bienfaisante. »

Mais, aux effets d'une interprétation erronée, on peut opposer les avantages qu'une volonté forte tire de la doctrine déterministe justement comprise ; car la connaissance exacte du poids relatif des motifs qui nous poussent à nos décisions, l'appréciation adéquate de la façon dont nous sommes capables de réagir aux stimuli ou d'en inhiber les effets, nous apprend à renforcer notre volonté en agissant sur nous-même, de façon à assurer le triomphe de notre personnalité permanente sur le cours changeant des excitations extérieures.

CHAPITRE II

LA VALEUR DE L'HYPOTHÈSE MÉCANIQUE EN BIOLOGIE

§ 5. **Le physicisme.** — Le terrain ainsi déblayé des difficultés d'ordre psychologique et moral, retournous à la considération scientifique des phénomènes de la vie. Le déterminisme implique, d'une façon générale, la possibilité la plus étendue de découvrir, dans la série de ces phénomènes, des rapports invariables de coexistence et de succession. L'hypothèse mécanique y ajoute une idée limitative, en suggérant la possibilité de choisir, comme circonstances déterminantes des phénomènes vitaux, des données ayant un sens *physique* indépendant de la vie. Ce mode particulier d'entendre le déterminisme biologique prend le nom de *physicisme;* il répond plus exactement aux réquisits suivants :

1° L'*explication biologique* doit représenter les phénomènes biologiques comme des conséquences ou dépendances invariables de données physico-chimiques (chaleur, électricité, mouvement, etc.), qui se produisent suivant certains rapports quantitatifs ;

2° Par conséquent, le concours de ces phénomènes physico-chimiques doit permettre de reproduire des phénomènes analogues aux phénomènes vitaux, *en dehors de la vie.*

Quand on considère le physicisme, non pas tant comme aspiration lointaine, que dans son application pratique immédiate dans l'état actuel de la science, on ajoute implicitement les hypothèses suivantes :

3° L'analyse des causes physiques des phénomènes de la vie permet de les réduire à un nombre d'éléments qui n'est pas trop considérable.

4° Les conditions essentielles, dont on doit tenir compte dans la causalité physique, ne sont pas altérées quand on considère ces phénomènes dans leur dépendance avec ceux de la vie.

On ne saurait dire que l'hypothèse du physicisme, ainsi entendue, n'ait conduit, à l'heure actuelle, à aucun résultat. On pourrait citer, par exemple, *la fécondation artificielle* de Loeb et de Delage qui répond précisément à la condition 2.

Cependant les résultats des études des cinquante dernières années, considérés dans leur ensemble, semblent infirmer le physicisme dans le sens pratique défini par le requisit précédent, sans rien préjuger de la croyance en un progrès très éloigné.

Il résulte de l'expérience, en effet, *qu'on ne peut traiter de la physique biologique en faisant abstraction de la condition essentielle de la vie.*

Seul, un petit nombre de rapports physiques généraux, dominant la variété des conditions, se trouve vérifié sans changement dans la biologie, comme la conservation de la matière et de l'énergie. Mais dans les lois moins étendues, qui se rapportent à la diffusion, à l'osmose, ou à la conductibilité, on rencontre à chaque pas des exceptions et des contradictions apparentes.

Il est vrai que, par des études récentes de chimie physique, on est parvenu à rendre compte de quelques-unes de ces anomalies ; ainsi, par exemple, on a expliqué, d'après Ostwald, la rapide combustion des corps alimentaires par le rôle des catalysateurs.

Il n'en reste pas moins un trop grand nombre de contradictions inexpliquées d'ordre différent. Voilà une torpille, bouteille vivante de Leyde, dont la charge électrique s'accomplit dans des circonstances paradoxales. Tandis que le fonctionnement des machines est si facilement entravé par l'humidité de l'isolateur nous voyons une charge qui ne se perd pas dans l'eau ambiante, dont les tissus mêmes de l'animal sont imbibés.

On ne pourrait nier ou atténuer la portée de semblables faits bien avérés, même s'il ne s'agissait que de rares exceptions ; mais, *a fortiori*, devons-nous d'autant plus en tenir compte que leur nombre et leur fréquence sont plus importants et qu'il s'agit de différences qui se manifestent déjà aux premiers échelons de la vie. La physiologie générale de la cellule, telle que Max Verworn nous la représente dans son remarquable traité, et la physique des tissus en fournissent de multiples exemples caractéristiques. Citons-en un seul. Les cellules vivantes de la vessie empêchent la diffusion de l'eau ; et pourtant on ne trouve pas chez elles une membrane imperméable qui puisse jouer le rôle d'obstacle. Il faut donc convenir qu'un tissu humide s'oppose au passage de l'eau, quand il est *en puissance de vie.*

Des phénomènes de ce genre peuvent toujours se concilier avec un physicisme théorique, si l'on postule l'enchevêtrement de rapports trop complexes pour être décomposés en leurs éléments physiques hypothétiques ; mais ils conduisent à une attitude d'esprit, qui renonce provisoirement au moins à une *explication analytique* et se tourne vers une *explication synthétique*, dans lequel le *fait de vivre* est pris

comme condition fondamentale pour exprimer le résultat moyen des circonstances élémentaires superposées.

Au lieu de choisir alors exclusivement, comme facteurs déterminants, des données physiques, on prendra toutes les circonstances notables qui se rattachent à la vie, sans chercher leur réduction ultérieure. Et, au lieu de simplifier arbitrairement *a priori* le déterminisme physique dans les milieux vivants, on cherchera à reconnaître ses différences caractéristiques, aptes à fournir dans leur ensemble une *définition positive de la vie.*

C'est vers ce but que tendent quelques belles recherches de G. Galeotti, d'où il résulte que le plasma vivant empêche la diffusion de certaines substances ; qu'il empêche, en général, l'établissement de l'équilibre osmotique, et qu'il exerce, dans certains cas, une résistance particulière aux ions mus par des forces électromotrices.

§ 6. **L'explication téléologique.** — Dans ce qui précède, nous nous sommes préoccupés surtout des phénomènes qui se déroulent dans un milieu vivant ; *a fortiori*, la nécessité d'une explication synthétique est-elle requise lorsqu'il s'agit de phénomènes proprement physiologiques. Notre critique montre qu'un tel mode d'explication ne contredit pas l'hypothèse mécanique et le physicisme théorique qui en dérive, pourvu qu'on enlève à celui-ci toute signification pratique comme méthode de recherche actuelle.

Mais il importe, maintenant, de nous demander si le physicisme théorique n'impose pas quelque limite à la nature des explications reçues en physiologie, et, notamment, s'il n'implique pas de considérer comme privée de sens toute *considération téléologique.*

Constatons, avant tout, le fait qui donne lieu au problème. La plus grande partie des connaissances physiologiques reçoivent une forme inverse de celle qui représente le lien de dépendance des effets vis-à-vis des causes. On la rencontre presque dans chaque ordre de phénomènes vitaux, et, non seulement dans l'étude de l'être vivant, mais aussi dans la physiologie des tissus.

Si, par exemple, on veut comprendre quelles sont les substances dont un tissu empêche la diffusion, on est conduit à faire appel à l'idée du *besoin* qu'a le plasma de réagir plutôt d'une façon que d'une autre, comme si l'antécédent pouvait être déterminé par le conséquent plutôt que vice versa. Cette idée se fait déjà jour dans la *loi de la réaction cellulaire*, qui semble mettre le concept de *finalité* à la base de toutes les *explications* dans les sciences de la vie.

Un tel mode d'explication soulève une grande répulsion chez ceux qui prennent pour modèle les sciences physiques. Il semble, à première vue, qu'entre le téléologisme et le physicisme, même conçu théoriquement, il existe une antinomie irréductible, et les physicistes en déduisent que toute explication téléologique doit être rigoureusement éliminée comme privée de sens.

Nous examinerons dans un instant si l'antinomie indiquée peut être résolue. Nous observerons, pour le moment, qu'on ne saurait vraiment pas s'en tenir dans la pratique à une règle aussi simple.

En effet, ceux qui y adhèrent ne sont plus capables ensuite de substituer quelque chose d'autre aux nombreuses discriminations de cas sans lien de causalité apparente, auxquelles parvient le physiologiste en tenant compte de certaines différences *par rapport aux fins de la vie.* Les physicistes répondront que ce

sont là des *explications verbales sans signification ni valeur*, un voile jeté sur notre ignorance qu'on peut bien enlever sans regret, même si on ne met rien d'autre à la place.

Il en serait bien ainsi si l'on devait prendre les expressions téléologiques dans le sens d'un vitalisme mystique, confondant le point de vue représentatif de la connaissance avec le point de vue actif de la volonté. Mais on peut leur découvrir un sens positif, et c'est pour cela que nous contestons sur ce point la critique des physicistes.

Il n'est pas vrai que l'utilité ou le dommage d'un être vivant soient des expressions vides de sens, car ils impliquent un fait qui peut être expérimentalement reconnu. Il n'est pas vrai que les explications où l'on fait appel à l'idée d'une fonction appropriée à une fin de la vie, soient privées de valeur, car, en invoquant de semblables circonstances déterminantes, on obtient, dans différents groupes de phénomènes, des *prévisions significatives*, et c'est pourquoi, malgré toutes les répugnances, on maintient l'explication téléologique dans les sciences de la vie.

Il reste seulement à en donner une interprétation convenable et à démontrer qu'elle n'implique plus une antinomie irréductible avec l'esprit du déterminisme mécanique. Distinguons, à cette fin, deux types d'explication où figure, de façons différentes, l'idée d'une fin :

1° L'explication psychologique, où l'on considère une certaine fin comme motif déterminant de l'action volontaire d'un être vivant ;

2° L'explication plus proprement physiologique, où l'on considère la structure d'un organe par rapport à la fonction qu'il doit remplir, ou bien, d'une façon générale, où l'on cherche à se représenter certains

caractères biologiques ou certaines réactions du plasma comme répondant à certains besoins.

Le premier cas se ramène de suite au déterminisme habituel, car nous reconnaissons comme cause de l'action, non pas à proprement parler la fin proposée, mais sa représentation qui résulte du souvenir et de l'association des sensations précédentes.

Le second cas se ramène difficilement au premier, à moins de recourir à l'hypothèse d'une providence qui détermine la réalité actuelle en vue d'une fin à venir, comme nous construisons une machine en vue de certaines fonctions. Or, tous ceux qui veulent faire abstraction de la valeur morale et religieuse d'une semblable hypothèse, pour la juger exclusivement au point de vue de la connaissance, devront admettre qu'elle n'a pas de valeur scientifique ou bien qu'elle ne nous fournit que des prévisions indifféremment vraies ou fausses, sans nous donner un critérium de choix possible.

Il reste à savoir si les explications biologiques du second type peuvent s'accorder avec l'idée que nous nous faisons du déterminisme, indépendamment de l'hypothèse d'une intervention providentielle. L'accord est effectivement possible, si l'on interprète l'explication téléologique dans un sens positif comme répondant à *un premier degré de connaissance*.

Au lieu de comparer cet ordre d'explication à celui vers lequel on tend dans le plus haut développement de la physique, où de causes connues on va aux effets inconnus, nous le comparerons à l'explication que l'on rencontre dans la physique même, comme premier degré de la recherche inductive, lorsqu'il s'agit de tirer des hypothèses d'observations préliminaires, c'est-à-dire quand il s'agit de remonter de l'effet connu aux causes inconnues.

On peut envisager aussi les problèmes physiques dans ce sens téléologique. Il suffit d'en donner quelques exemples empruntés à la mécanique et à l'astronomie.

On peut imaginer de différentes façons des systèmes mécaniques qui se trouvent dans un certain état d'équilibre stable; chaque petit mouvement, produit par une perturbation quelconque, engendre des forces qui reconduisent le système à sa position initiale. Dans ces cas, la stabilité étant donnée comme une condition à satisfaire, le problème consiste à trouver les forces qui en expliquent l'existence. Dans un sens plus étendu, le système planétaire possède lui aussi une stabilité vérifiée pratiquement dans les limites de l'observation, qui se présente aux astronomes comme un problème à résoudre.

Le problème fut résolu, non pas par Newton, qui pensait que les attractions planétaires mutuelles devaient détruire le régime permanent du système, mais par Laplace, qui reconnut que les effets des perturbations sur les éléments de l'orbite tendent à se condenser périodiquement, en dehors d'une petite variation séculaire. Ainsi fut rétablie l'harmonie de la loi de gravitation, que son auteur même avait troublée par l'hypothèse d'une intervention providentielle.

Un autre problème de ce genre est celui de la stabilité de l'anneau de Saturne. Elle constitue un fait que nous pouvons nous représenter comme le résultat de causes inconnues qu'il s'agit de déterminer. Or, si on émet l'hypothèse la plus simple, à savoir que l'anneau est constitué par une matière compacte, et si l'on évalue les forces attractives qui s'exercent entre les différentes parties de ce corps et l'action de la masse de Saturne sur lui, il n'en

résulte pas d'équilibre stable. C'est pourquoi l'on est conduit à examiner d'autres hypothèses, en cherchant une disposition de la matière qui réponde aux conditions posées. Ces conditions, prises ainsi comme une fin à satisfaire, ne préexistent à la disposition inconnue de la masse de l'anneau que dans l'ordre de notre connaissance, qui se présente comme inverse de celui que nous nous figurons être l'ordre réel.

D'après ces exemples, il est facile de comprendre le mode d'explication qui a cours en biologie, où l'on parle de la dépendance d'un organe vis-à-vis d'une fonction et d'une façon de réagir appropriée à une fin utile. On peut enlever à ces expressions toute apparence de contradiction avec le déterminisme physique. Il suffit de considérer que, parmi les multiples facteurs d'un phénomène biologique, la *vie* nous apparaît comme synthétiquement donnée *avant* tous les autres facteurs supposés : non pas dans la réalité, mais dans l'ordre de notre connaissance. Ainsi, nous remontons de la fonction connue aux caractères de l'organe capable d'en rendre compte. De ce que le plasma vit, nous concluons, avec beaucoup de vraisemblance, à une certaine faculté qu'il a de réagir d'une façon utile, tout au moins quand il s'agit de stimuli qui ne provoquent pas sa mort, etc.

Un tel processus d'explication serait parfait et se convertirait dans une explication du type physique, si, en remontant des faits aux causes, on réussissait à déterminer le groupe entier des causes marquantes dont le concours permet de reproduire expérimentalement le phénomène. Cela ne s'est pas encore produit pour les explications proprement biologiques; mais elles contiennent néanmoins un degré de connaissance positive que les observations précédentes mettent en lumière.

Nous arrivons, en effet, à remonter des effets que nous nous représentons comme « fins » de la vie à quelques-unes des causes très prochaines qui concourent à les produire, et de celles-ci, de proche en proche, aux conditions concomitantes les plus cachées et aux causes les plus éloignées.

Seulement, ici, la chaîne est plus complexe et plus longue, et il ne nous est pas donné d'intervertir la série, pas plus qu'il n'est donné à un chimiste d'expliquer un tableau de Raphaël par l'analyse des couleurs qui le composent.

§ 7. **La vie et les principes thermodynamiques.** — Jusqu'à présent, nous n'avons trouvé aucune contradiction irréductible entre l'hypothèse mécanique et les sciences de la vie.

Pour poursuivre notre examen, nous devons soumettre à une vérification les principes de la physique qui résultent des hypothèses mécaniques les plus générales. Passons rapidement sur la *conservation de la matière* qui s'étend aux phénomènes de la vie et parlons des principes énergétiques et, particulièrement, de ceux de la thermodynamique.

Avant tout, *le principe de la conservation de l'énergie est vérifié dans les phénomènes de la vie.* En dehors de cela, on ne sait rien de positif.

Il serait très intéressant de faire des recherches approfondies sur le deuxième principe de la thermodynamique. Dans l'hypothèse mécanique, celui-ci apparaît comme un effet de moyennes dans un système *désorganisé*. Or, dans le cas qui nous occupe, le postulat de la moyenne soulève de très graves doutes. Qu'exprime au fond ce postulat? Il traduit, par un calcul numérique, l'hypothèse d'une certaine *régularité statistique* dans un grand nombre de phénomènes, dont les différences ne peuvent se rattacher à des causes *systématiques*. La régularité statistique simule bien l'état de ce qui *apparaît homogène*, ou tend vers une certaine homogénéité, mais le caractère propre de la matière vivante est, au contraire, une *hétérogénéité* intime; la pensée que celle-ci recouvre une *organisation du mouvement* se présente très naturellement.

D'autre part, il semble difficile d'accorder une semblable hypothèse avec le régime permanent de la vie. A côté d'un système cinétique organisé, un nombre infini de systèmes désorganisés paraissent possibles, tels que le passage de l'un d'eux aux autres corresponde à des variations infinitésimales; si bien qu'on ne saurait expliquer la permanence de l'état organisé.

Comme on le voit, l'hypothèse mécanique à elle seule ne suffit peut-être pas à conclure à la validité du postulat de Clausius dans le domaine de la vie, mais elle le fait considérer comme probable. Or, de quelque façon que l'on apprécie les arguments théoriques, la réponse ne peut venir que de l'expérience. L'étude thermodynamique des phénomènes physiologiques doit résoudre le problème de savoir *si le postulat de Clausius subsiste encore dans les phénomènes de la vie.*

La question semble plus accessible du côté des végétaux; et certains résultats sur le rôle de la lumière dans les transformations chimiques laissent prévoir une réponse affirmative.

§ 8. **L'hypothèse mécanique et les problèmes de l'évolution.** — Il résulte de l'analyse précédente que, dans l'état actuel de leur développement, *les sciences de la vie n'apportent aucune contradiction à l'hypo-*

thèse mécanique. Mais cette conclusion est purement négative. Il s'agit maintenant d'apprécier *la valeur positive* de l'hypothèse.

Selon nous, *on peut considérer l'hypothèse mécanique comme indifférente au progrès de la biologie.* Avant tout, la discussion du paragraphe 39 nous a montré qu'on ne peut considérer un physicisme théorique comme une méthode pratique de recherches. La possibilité éloignée d'un tel modèle reste sans influence à cet égard sur le genre d'explication à employer dans les phénomènes de la vie. En second lieu, il est facile de constater que l'hypothèse mécanique dans sa généralité indéterminée est incapable de résoudre dans un sens plutôt que dans un autre les problèmes généraux de la biologie, par exemple d'apporter son appui à l'un ou à l'autre des courants de pensée *épigénétique* ou *préformiste* qui entrent en conflit dans l'explication de l'*évolution organique*.

On peut imaginer différentes séries de modèles mécaniques, qui jouissent, entre certaines limites, d'un certain régime permanent, de façon à donner lieu aux cas suivants :

1° Chaque mécanisme repasse périodiquement par les mêmes phases, à une variation accidentelle près qui se compense statistiquement pour les différents mécanismes de la série ; mais des forces extérieures impriment à chaque mécanisme une variation dans un certain sens, qui détermine une évolution du type moyen de la série.

2° La périodicité statistique des mécanismes de la série subsiste encore ; mais les forces extérieures qui s'y appliquent impriment au type moyen une évolution déterminée, non pas qu'elles soient capables de modifier profondément le développement de chaque mécanisme particulier, mais parce qu'elles opèrent une

sélection, en tendant à délimiter le régime permanent des mécanismes, dont les variations procèdent dans un certain sens.

3° Les mécanismes de la série présentent une presque périodicité ; le type moyen se répète quasi périodiquement, mais à la variation périodique rapide se superpose une variation lente dans un sens déterminé.

Eh bien, mise à part la difficulté de préciser ces modèles, on remarquera facilement qu'ils prouvent la possibilité de concilier indifféremment le mécanisme avec les trois espèces d'hypothèses fondamentales, invoquées pour rendre compte de l'évolution des êtres vivants, et qui attribuent un rôle différent aux causes *intérieures* et *extérieures* de variations. Ce sont les hypothèses suivantes :

1° Les variations héréditaires individuelles ont lieu d'une façon indifférente, si bien que des facteurs intérieurs résulte une périodicité statistique rigoureuse des caractères, c'est-à-dire la constance de l'espèce ; mais le *milieu modifie l'être vivant* et les caractères acquis par adaptation se transmettent par hérédité aux nouvelles générations (théorie de Lamarck).

2° Les variations individuelles intérieures donneraient comme résultat une compensation statistique, c'est-à-dire la fixité du type moyen ; mais, par suite de la lutte pour la vie, le *milieu sélectionne les variations utiles* qui se transmettent ensuite par hérédité de manière à donner à l'évolution de l'espèce un sens défini (théorie de Darwin).

3° Les variations héréditaires intérieures ne se compensent pas rigoureusement dans la moyenne, mais procèdent dans un sens déterminé (*orthogénèse* d'Eimer) ; on a alors un développement de l'espèce tout à fait analogue au développement ontogénique (la con-

tinuité du plasma germinal de Weismann conduit précisément à l'idée que l'espèce se comporte comme un individu de longue durée). Dans cette hypothèse, le milieu joue un rôle secondaire et plutôt négatif. La sélection naturelle agit d'ordinaire comme un mode de *conservation* de l'espèce (Pfeffer), dont l'efficacité est indirectement prouvée par certaines régressions comme celle des taupes aveugles (*Panmixie*).

§ 9. **L'indifférence de l'explication mécanique en biologie.** — Les considérations précédentes montrent que l'hypothèse mécanique, prise dans sa généralité indéterminée, est indifférente au progrès des sciences de la vie. Mais il y a plus. A part l'extrême difficulté de découvrir le mécanisme hypothétique de chaque ordre donné de phénomènes vitaux, il y a lieu de se demander quelle valeur pourrait avoir, relativement aux questions qui nous intéressent, la description particulière de celui-ci et la connaissance des rapports quantitatifs qui s'y rattachent.

Nous avons déjà vu quelle est la valeur propre de l'explication mécanique pour les phénomènes physiques. Les difficultés de l'explication intégrale se subdivisent en deux parties :

1° Dans l'une, il s'agit de déterminer, au moyen d'une hypothèse mécanique fondamentale, les rapports entre certaines données prises abstraitement comme *quantités* ;

2° Dans l'autre, il s'agit d'*interpréter* ces rapports au moyen d'*hypothèses* complémentaires, en ajoutant aux prévisions directement quantitatives *des prévisions qualitatives*.

Le mécanisme des phénomènes n'en épuise pas la connaissance, pas même pour les cas où l'on peut le décrire exactement : les vibrations d'une corde, que

le mathématicien représente comme un fait optique au moyen de la série de Fourier, comportent des rapports harmoniques qui peuvent bien s'associer à la forme de la série, mais qui constituent toujours une *interprétation ou une association ajoutée* aux impressions visuelles symbolisées par elle.

Or, la solution du premier problème a une importance d'autant plus grande que la majeure partie des demandes posées se rapportent à des *questions de mesure*. Par contre, les équations qui expriment l'hypothèse mécanique fondamentale sont d'autant moins significatives qu'on augmente le nombre des hypothèses complémentaires nécessaires à leur interprétation.

Si nous classons maintenant les problèmes physiques dans une série, où l'*intérêt* de l'explication mécanique aille en décroissant, *les problèmes de la vie se présenteront comme cas limite de cette série*. L'explication mécanique apparaît donc comme indifférente dans ce domaine de la science.

§ 10. **Conclusion.** — Notre conclusion est que, dans l'état actuel de nos connaissances, *l'hypothèse mécanique n'est pas en contradiction avec les phénomènes de la vie, mais indifférente pour leur étude.*

Cependant, cette hypothèse eut, par le passé, une mission importante : elle affirma catégoriquement l'indépendance de la science et du sentiment, et unifia les conceptions scientifiques. Guidé par l'instinct d'un mécanisme caché, on apprit à considérer la vie comme un objet propre de science, et on comprit le lien intime des processus qui se font jour dans les différents domaines du savoir, séparés seulement par la nécessité pratique de la division du travail, mais superposés dans la prévision concrète, c'est-à-dire unis dans la réalité.

Pour nous rendre compte exactement de ce résultat, il faut revenir au temps de Descartes, lorsque les idées de Harvey sur la circulation du sang rencontraient un obstacle dans les préjugés courants sur la *force vitale*. Ce fut un incomparable progrès d'avoir compris qu'il y a une physique unique, s'étendant sans solution de continuité aux phénomènes vitaux, et ce fut une intuition magnifique que celle qui conduisit à considérer les faits physiques comme des lois simples et uniformes dominant la diversité des conditions.

Il en résulte une juste appréciation de la tendance unificatrice du mécanisme. Elle offre une représentation adéquate du développement initial des sciences de la vie; seulement, d'un point de vue plus avancé, on se rend compte que cette unification est obtenue par l'emploi de critères un peu étroits et unilatéraux, en acceptant comme parfait et général un type de science plus développé, et en prétendant subordonner rigidement à ce type toutes les autres formes de savoir.

Aussi, l'attitude de la philosophie mécaniste s'est-elle modifiée grâce aux progrès de la biologie, qui, réagissant à son tour sur la physique, nous amène à concevoir une unification supérieure, c'est-à-dire un type de science plus parfait et plus général, qui comprend les diverses formes particulières du savoir séparées par les exigences de la technique.

Ce type supérieur, répondant aux différents domaines de la science, n'est pas un schéma rigide issu d'une disposition d'esprit dogmatique. Ce n'est pas non plus une superposition d'acquisitions, qui s'ajoutent simplement les unes aux autres. C'est un *processus d'association et d'abstraction* qui opère sur les données sensibles, en construisant les concepts des invariants réels. C'est un développement de composition et de

dissociation qui s'applique aux deux phases inductive et déductive de la science et aboutit à une *extension et à une correction progressive de nos prévisions*.

De même que, pour les différentes formes de l'évolution de la vie, ce développement peut être plus lent et plus rapide, les phases inductive et déductive de la science, tantôt apparaissent comme des moments distincts du processus scientifique, ainsi qu'on l'observe en physique, tantôt s'entrelacent et se confondent presque, comme il arrive en biologie.

Cette comparaison est intéressante à deux points de vue. C'est seulement en partant de la physique qu'il nous est possible de concevoir le degré de perfection auquel pourront tendre dans l'avenir les sciences de la vie; mais l'énorme complication de celles-ci et l'incertitude des explications biologiques qui en résultent nous amènent à considérer la *connaissance exacte* comme une connaissance *très approximative*, qu'on ne peut considérer comme satisfaisante qu'à la condition de la limiter à un cercle restreint de prévisions, mais qui devra subir tôt ou tard, pour un cercle plus étendu, une correction résultant de l'adjonction des conditions complémentaires négligées.

Prenons un exemple déjà cité. La dynamique de Galilée et de Newton semble exiger de nos jours, après deux siècles d'existence, une correction en tant qu'il faut compléter la distinction abstraite de certaines circonstances du mouvement, *intérieures* et *extérieures* au corps mobile, par un postulat d'*hérédité* (influence déterminante du mouvement passé) ou de *solidarité* du champ du mouvement (§ 33). Eh bien, le terme même dont on se sert pour désigner l'hypothèse correctrice fait allusion à son analogie avec certaines catégories de circonstances qui apparaissent dans la vie. Les biologistes, qui étudient l'évolution des espèces

biologiques, tendent précisément à séparer (comme dans le mouvement) les facteurs intérieurs et extérieurs de la variation (préformisme et épigénèse), et invoquent continuellement l'idée de l'hérédité et de la solidarité des organes. Dans un domaine plus complexe, le point de vue synthétique s'est donc présenté le premier et s'est imposé avec le plus d'évidence; dans une théorie apparemment simple, il se présente seulement quand on réclame une précision plus élevée.

En ce sens, nous pouvons dire que *le développement des sciences de la vie se présente comme une récapitulation abrégée de celui des sciences physiques.*

FIN

TABLE DES MATIÈRES

Pages

AVERTISSEMENT 1

PRÉFACE 3

LIVRE I

LA GÉOMÉTRIE

CHAP. I. — **La signification réelle de la géométrie** 5

§ 1. *Introduction* 5
2. *Réalisme et nominalisme géométriques* 6
3. *Critique des définitions transcendantes de l'espace* ... 7
4. *Le nouveau nominalisme de H. Poincaré* 10
5. *La géométrie comme partie de la physique* 15
6. *L'exactitude de la géométrie* 19

CHAP. II. — **Les géométries non-euclidiennes et leurs conséquences philosophiques** 22

§ 7. *L'espace comme concept : la géométrie abstraite* 22
8. *Remarques historiques sur le développement des géométries non-euclidiennes* 24
9. *Le problème de l'espace* 29
10. *La non-représentabilité des géométries non-euclidiennes* 36
11. *Autres géométries possibles* 38
12. *La géométrie non-archimédienne et l'arbitraire des postulats* 39

Pages

CHAP. III. — **Les données spatiales des sens et la genèse psychologique des concepts géométriques**.... 42

§ 13. *Position du problème* 42
14. *Le problème biologique de l'orientation spatiale* 43
15. *Programme des recherches ultérieures* 45
16. *Sources de la critique* 46
17. *Remarques générales sur le contenu spatial de la perception* 47
18. *Les espaces physiologiques et l'espace géométrique* .. 49
19. *Les données spatiales de la vue et la géométrie projective* 50
20. *Les données spatiales des sensations tactiles et musculaires et la géométrie métrique* 57

CHAP. IV. — **La genèse psychologique des postulats géométriques** 62

§ 21. *Parallèle entre le développement historique et psychogénétique des postulats* 62
22. *Les postulats du continu : la ligne* 65
23. *Les postulats du continu à deux et à trois dimensions* 70
24. *Les postulats de la géométrie projective* 73
25. *Les postulats de la géométrie métrique*..... 76
26. *L'association de la géométrie métrique et de la géométrie projective : le postulat des parallèles* 78
27. *Conclusion* 82

LIVRE II

LA MÉCANIQUE

CHAP. I. — **Le temps et sa mesure** 84

§ 1. *La mécanique comme extension de la géométrie* 84
2. *Programme* 86
3. *Le temps : succession et durée* 87
4. *Le temps psychologique et le temps physique* 87
5. *Propriétés de la succession temporelle* 90
6. *La durée* 90
7. *Le postulat de la mesure du temps* 96
8. *L'indépendance du temps vis-à-vis du lieu* 99

Pages

CHAP. II. — **Les concepts et les principes fondamentaux de la statique**..... 103

§ 9. *Le développement historique et l'évidence des principes* 103
10. *Concepts fondamentaux* 108
11. *Nominalisme mathématique* 108
12. *Le point matériel* 112
13. *La force* 114
14. *Les données géométriques de la force* 117
15. *Les Principes de la symétrie statique* 119
16. *La composition des forces* 120

CHAP. III. — **Les concepts et les principes fondamentaux de la dynamique**..... 123

§ 17. *La fondation de la dynamique* 123
18. *Le mouvement* 127
19. *La masse* 136
20. *Le postulat de la masse et le principe dynamique d'action et de réaction* 144
21. *La loi fondamentale du mouvement* 149
22. *La loi d'inertie généralisée* 153
23. *L'appréciation synthétique des principes* 156

CHAP. IV. — **La statique et la dynamique des systèmes**.. 159

§ 24. *La statique des systèmes : les liaisons* 159
25. *Le levier et le plan incliné : principe des moments statiques* 160
26. *Le principe du travail virtuel* 163
27. *La dynamique des systèmes : le principe de d'Alembert* 166
28. *Le principe des forces vives et de moindre action*.. 168
29. *La vérification de la dynamique* 170

LIVRE III

L'EXTENSION DE LA MÉCANIQUE

CHAP. I. — **La physique comme extension de la mécanique**..... 178

Pages

§ 1. *Le développement de la philosophie mécaniste* 178
2. *Quantité et qualité : l'hypothèse cartésienne* 180
3. *Le poids* 181
4. *La quantité de chaleur* 183
5. *La mesure de l'intensité* 184
6. *La mesure naturelle ou absolue : la température* .. 186
7. *Récapitulation et critique* 188

CHAP. II. — **Les deux formes du mécanisme : la théorie cinétique des gaz et la théorie de l'élasticité.** 192

§ 8. *Les deux types de mécanisme : le type cartésien et le type newtonien* 192
9. *La réduction des forces au choc : la gravitation*.... 193
10. *La théorie cinétique des gaz* 196
11. *La théorie élastique : les corps solides* 198
12. *Les altérations permanentes* 202

CHAP. III. — **La thermodynamique et l'explication mécanique de la chalenr**..... 204

§ 13. *La théorie mécanique de la chaleur : la conservation de l'énergie* 204
14. *Le second principe de la thermodynamique*..... 207
15. *Les phénomènes irréversibles* 211
16. *La mécanique énergétique* 215
17. *Matière et énergie* 218
18. *Localisation et mouvement de l'énergie* 221

CHAP. IV. — **L'optique et l'électromagnétisme**..... 223

§ 19. *L'explication élastique des phénomènes optiques et électromagnétiques* 223
20. *L'optique* 223
21. *L'électrostatique* 226
22. *L'électromagnétisme* 228
23. *Le contenu positif de la théorie de Maxwell* 231
24. *L'élasticité considérée comme mouvement* 235
25. *L'électromagnétisme des corps en mouvement ; la théorie de Hertz* 238

CHAP. V. — **La théorie de Lorentz et la mécanique de la relativité**..... 244

§ 26. *La théorie de Lorentz* 244
27. *Critique : Le principe d'action et de réaction* 247

Pages

28. *Le principe de relativité* 249
29. *La relativité d'après Einstein : la relativité du temps* 253
30. *Ether et matière* 256
31. *La dynamique de l'électron : les radiations* 259
32. *La dynamique électrique* 261
33. *L'explication électrique de la gravitation* 264

CHAP. VI. — **La dynamique non-newtonienne et la valeur de l'explication mécanique**..... 266

§ 34. *La dynamique générale non-newtonienne* 266
35. *L'explication physique : la valeur des modèles mécaniques et des équations* 272

LIVRE IV

L'HYPOTHÈSE MÉCANIQUE ET LES PHÉNOMÈNES DE LA VIE

CHAP. I. — **La possibilité d'une science de la vie**..... 278

§ 1. *Introduction* 278
2. *Objections préjudicielles* 279
3. *Le Déterminisme biologique* 280
4. *Le Déterminisme psychologique et la liberté* 281

CHAP. II. — **La valeur de l'hypothèse mécanique en biologie**..... 289

§ 5. *Le Physicisme* 289
6. *L'explication téléologique* 292
7. *La vie et les principes de la thermodynamique* 298
8. *L'hypothèse mécanique et les problèmes de l'évolution* 299
9. *L'indifférence de l'explication mécanique en biologie.* 302
10. *Conclusion* 303

5270-5-19 — Paris. — Imp. Hemmerlé et Cie.

CONCEPTS
FONDAMEN
TAUX
DE LA
SCIENCE

ENRIQUES

1919

Q
175
.E5
1919

ST.
BONA-
VENTURE